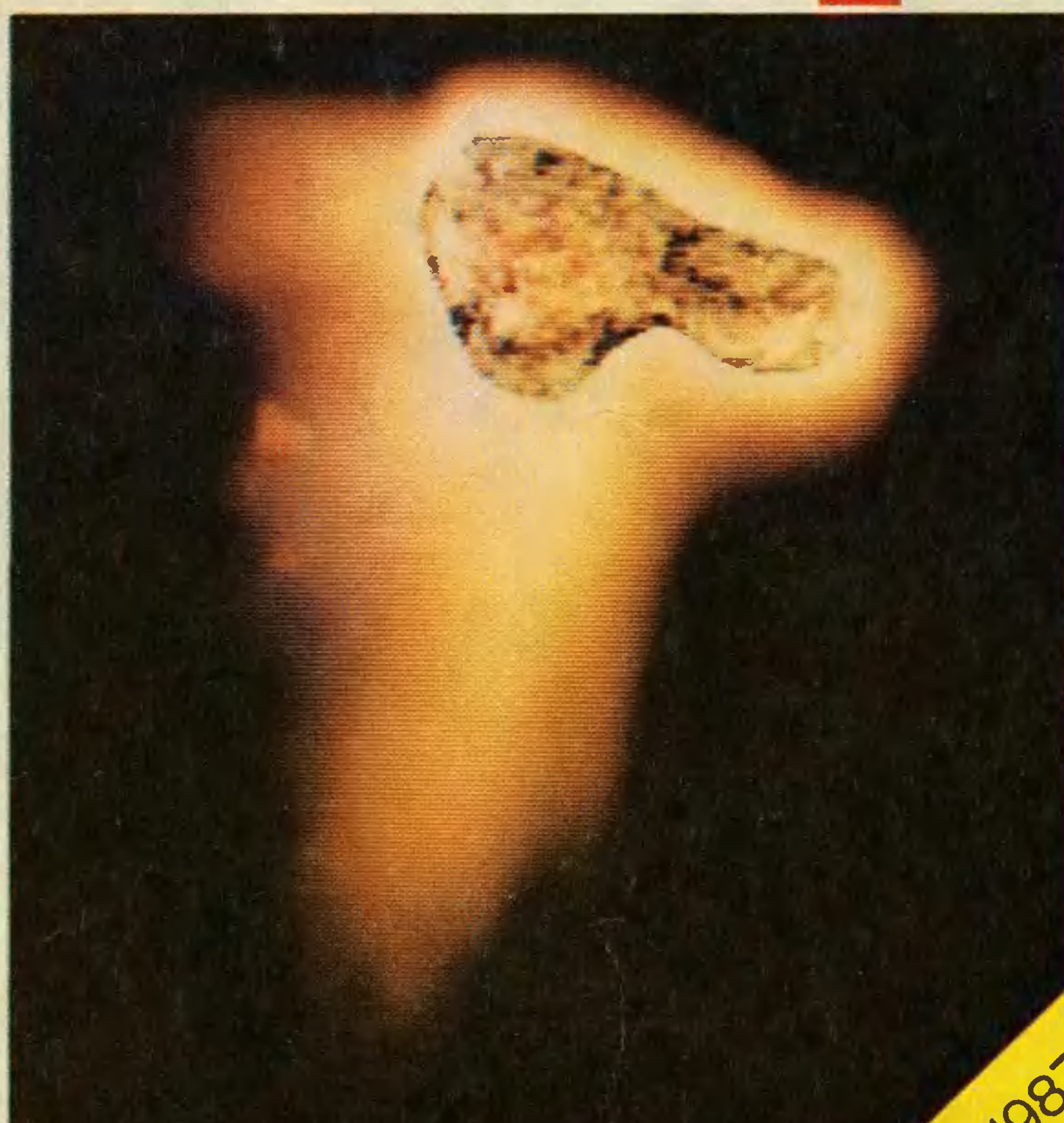
ISSN 0130—2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



1987

Стартовая масса «Энергии» свыше 2000 т, выводимый полезный груз — более 100 т. На фотографии вы видите «Энергию» перед стартом. Рядом в том же масштабе показана первая ракета на жидком топливе, созданная Р. Годдардом (США). Ее запуск состоялся в 1926 году. И хотя пролетела она всего лишь 56 м, ее можно считать прабабушкой современных ракет-носителей.

Год 30-летия космической эры отмечен в нашей стране рядом крупных достижений. Особое место среди них заняло создание универсальной ракеты-носителя «Энергия», успешные испытания которой проведены в мае этого года. «Энергия» — двухступенчатая ракета, выполненная по схеме «Пакет». Ее первая ступень состоит из четырех боковых блоков-ускорителей. Вторая ступень — центральный блок длиной 60 м и диаметром 8 м.

Квант

Основан в 1970 году

1987

10

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

На первой странице обложки — общий вид ядра кометы Галлея, полученный в результате обработки на ЭВМ телевизионных изображений ядра, переданных с борта автоматической станции «Вега-2»
О том, что дала ученым встреча с кометой, состоявшаяся в марте прошлого года, рассказывается в этом номере журнала (с 8)

30 лет космической эры

В истории величайших научно-технических свершений событие, которое произошло 4 октября 1957 года, занимает особое место. В этот день запуском Первого искусственного спутника Земли человечество вступило в новую эру — эру освоения и использования космического пространства.

При всей грандиозности последующих достижений космонавтики ни одно из них не оказало, по всеобщему признанию, такого огромного воздействия на умы и чувства людей во всех концах планеты, как запуск «простейшего спутника» (как называли его сами создатели). Но запуск спутника — это не только создание аппарата, способного функционировать в условиях космического полета. Это разработка и сооружение огромного ракетно-космического комплекса.

То, что приоритет в его создании принадлежит Советскому Союзу, — показатель мощного научно-технического потенциала нашей страны, способности мобилизовать усилия и ресурсы для решения сложнейших задач. Отечественная космонавтика и сегодня занимает ведущие позиции на многих направлениях изучения и использования космического пространства. Огромная заслуга в ее становлении принадлежит С. П. Королеву, М. В. Келдышу, В. П. Глушко, М. К. Янгелю, В. Н. Челомею, Н. А. Пилюгину и многим другим выдающимся ученым и конструкторам.

В настоящее время космонавтика все в большей степени приобретает интернациональный характер. Десятки стран принимают участие в космических программах, некоторые из них создали собственные ракетно-космические системы.

Без космической техники уже немыслимы ни научная, ни хозяйственная деятельность. Космические аппараты исследуют Землю и дальние планеты, обслуживают геологов и работников сельского хозяйства, обеспечивают связь и обнаруживают терпящих бедствие, помогают создавать новые материалы и медицинские препараты.

Это сегодня. А завтра? Впереди новые проекты и новые маршруты, ведь космос — это дорога без конца!

Директор Института космических исследований АН СССР, член Международной академии астронавтики, научный руководитель проектов «Вега» и «Фобос». Можно ли мечтать о лучшем собеседнике, если вы хотите узнать об итогах и перспективах изучения и освоения космического пространства? И корреспондент «Кванта» обратился с просьбой о встрече к известному советскому физику академику Роальду Зиннуровичу Сагдееву...

ИНТЕРВЬЮ С АКАДЕМИКОМ Р. З. САГДЕЕВЫМ

— Первый искусственный спутник Земли и орбитальный комплекс «Мир» разделяют 30 лет. В технике — это целая эпоха. Нынешняя космическая техника стала уже неотъемлемой частью экономики, одной из наиболее перспективных отраслей народного хозяйства СССР. Каким представлялось будущее космонавтики 30 лет назад? В каком направлении пойдет развитие космической техники в ближайшие годы?

— Очень трудно сравнивать то, что получилось, с тем, что ожидали получить, так как настоящего, коллективно осознанного прогноза не было. Были прогнозы отдельных ученых. Например, очень яркий прогноз К. Э. Циолковского (он был дан еще за несколько десятков лет до запуска первого ИСЗ). Известно, что С. П. Королев много думал о том, в каком направлении будет развиваться космонавтика. Я полагаю, что пионеры космонавтики основные технические, организационные, психологические трудности, которые возникли позже, представляли достаточно хорошо.

Вместе с тем, сегодня космонавтика, на мой взгляд, носит скорее деловой, «рутинный» характер, нежели тот романтический, который представлялся мечтателям первых лет освоения космического пространства.

Меньший акцент в прогнозах делался на беспилотные автоматические аппараты. Во многих научно-фантастических сюжетах речь шла, да и сейчас идет, о деятельности на орбите или в далеком космосе экипажей или даже целых космических колоний. Но на Земле на протяжении десятилетий идет настоящее наступление автоматов, робототехники. Почему же не ожидать, что то же самое будет происходить и в космосе? Так, собственно, уже и получается. За 30 лет автоматы «научились» делать просто чудеса. В них постоянно реализуются все новые достижения из компьютерной техники, информатики. Сегодняшний автомат, в сущности, — предвестник искусственного интеллекта. Количество команд, «заложенных» в бортовые компьютеры таких аппаратов как, например, американский «Викинг» или наши «Веги», исчисляется десятками тысяч. Но и это еще не все: благодаря постояннодействующему каналу общения Земля — КА (космический аппарат) во время полета имеется возможность перепрограммирования. Когда мы обсуждали, например, задачу нахождения маленького ядра кометы Галлея среди гигантской яркой комы, мы решили оставить за бортовым компьютером свободу обнаружения, распознавания ядра, так как никто не знал, какой облик оно будет иметь. Такого рода задачи очень быстро двигают науку и технику, и на рубеже двух тысячелетий подобные КА будут определять лицо космической техники.

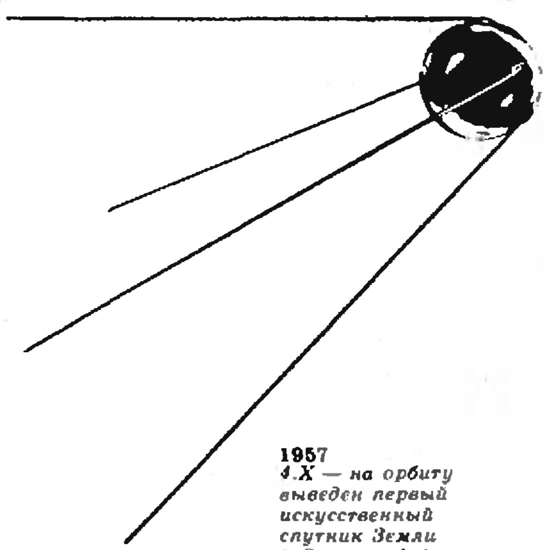
Не буду забегать так далеко, как это делает знаменитый американский физик Ф. Дайсон. КА будущего, зонды, покидающие Солнечную систему, он представляет себе в виде некоего гибрида ультрасовременной, вернее, ультрабудущей электроники, информатики и молекулярной генетики — некой «космической бабочки в защитном коконе», использующей принципы молекулярной биотехнологии и биоэлектроники. Хотя сегодня даже такие фантазии, наверное, заслуживают внимания.

— А какое место в космических полетах принадлежит все-таки человеку?

— Конечно, человек, космонавт имеет свою экологическую нишу в космосе. Например, на орбитальных станциях типа «Мир». И в ближайшие годы, может быть, до конца столетия, тенденции, которые наметились, будут развиваться. Пребывание человека на орбите станет уже постоянным.

Опыт, накопленный космической медициной в процессе длительных орбитальных полетов, а также опыт длительной эксплуатации космической техники в принципе позволили бы нашему современнику отправиться в многолетнее путешествие, например, на Марс. И такой проект имеет немало сторонников. В США к организации такой экспедиции призывают научно-технические общества и крупные ученые и специалисты в области космонавтики. Астрофизик К. Саган и его коллеги с этой целью основали мощную общественную организацию «Американское планетное общество». Современный уровень техники действительно позволяет осуществить такой полет. Однако его стоимость превысила бы в несколько раз стоимость самой дорогой на сегодняшний день космической программы — лунной экспедиции «Аполлон», реализованной в конце 60-х — начале 70-х годов.

Этапы освоения космического пространства



1957
4.X — на орбиту выведен первый искусственный спутник Земли («Спутник-1»).

3.XI — впервые запущен спутник с животным на борту (собака Лайка).

1959
2.I — впервые КА (космический аппарат) развил II космическую скорость («Луна-1»).
14.IX — впервые КА достиг Луны («Луна-2»).
7.X — впервые КА облетел Луну и сфотографировал ее обратную сторону («Луна-3»). ↓

1961
12.IV — первый полет человека в космос (Ю. А. Гагарин).→

1965
18.III — первый выход

Существуют и конкурирующие проекты. Их авторы считают, что автоматы могут собрать не меньшее количество научной информации, причем при значительно более низких затратах. Скорее всего, в будущих космических программах можно ожидать сочетания пилотируемой и непилотируемой техники, и рано или поздно полет человека на Марс состоится. Однако целесообразным это станет тогда, когда минимальный объем информации будет все же получен автоматами.

— С помощью космической техники стало возможным проводить исследования, недоступные для «земной» техники, удалось сделать немало научных открытий. Каковы наиболее важные из них?

— Сегодня трудно выделить какие-либо из них. Будущее покажет, какое место они займут в золотом фонде достижений человечества. И речь не идет только об астрономии. 30 лет космической эры обогатили многие отрасли науки и техники. На орбите получают новые материалы и медицинские препараты, ведут наблюдения за сельскохозяйственными и лесными массивами, составляют карты труднодоступных районов Земли, помогают геологам в поиске полезных ископаемых.

Что же касается астрономических исследований, здесь приоритет за двумя направлениями: изучением небесных объектов с помощью дистанционных методов и прямым исследованием Солнечной системы приборами, установленными на космических аппаратах. Выведя инструменты за пределы земной атмосферы, космическая астрономия дала возможность специалистам работать в недоступных на Земле из-за влияния атмосферы диапазонах — рентгеновском, инфракрасном, ультрафиолетовом диапазонах, а также в диапазоне гамма-излучения. В каждом из них получены конкретные результаты. Наши американские коллеги осуществили запуск рентгеновского телескопа «Эйнштейн» и с его помощью получили огромное количество информации о космических телах, являющихся мощными источниками рентгеновского излучения. К этим телам относятся квазары, пульсары, нейтронные звезды и черные дыры. В инфракрасном диапазоне тоже появились свои пионеры. Например, телескоп «ИРАС», созданный совместными усилиями ученых и специалистов США, Англии и Голландии. Приборы советского исследовательского спутника «Астрон» и международного — IUE провели наблюдения в ультрафиолетовом диапазоне уникального события — рождения сверхновой звезды в созвездии Золотой Рыбы. Многого ожидаем мы от первого астрофизического модуля «Квант», работающего в составе орбитального ком-

человека в открытый космос (А. А. Леонов).

1966
3.II — первая мягкая посадка КА на Луну («Луна-9») и передача на Землю телевизионного изображения лунной поверхности.

1969
21.VII — первая экспедиция

на Луне (Н. Армстронг и Э. Олдрин, «Аполлон-11»).

1970
24.IX — первая доставка на Землю лунного грунта автоматическим КА («Луна-16»).

плекса «Мир». В разработке приборов, установленных на нем, наряду с советскими учеными приняли участие английские, западногерманские, голландские специалисты.

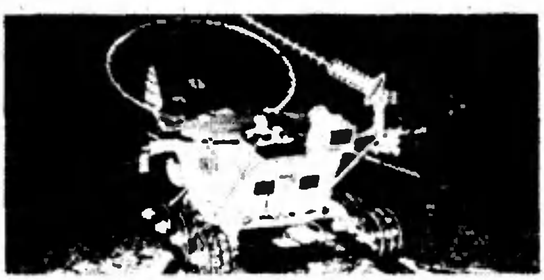
Изучение внегалактических объектов приведет к созданию новых моделей образования и эволюции Вселенной, формирования галактик и звездных систем, в частности — Солнечной системы.

— На заре космической эры многие надеялись, что полеты в космос сделают реальным обнаружение внеземной жизни, даже извечная мечта человечества о встрече с братьями по разуму, казалось, вот-вот сбудется. Может быть, именно это придавало космическим полетам особую романтику. Впрочем, и в фантастической художественной литературе эта тема была центральной (можно вспомнить замечательный роман И. А. Ефремова «Туманность Андромеды», появившийся в это же время). Шли годы, но ученым не только не удалось обнаружить жизнь на других небесных телах, многие из них вообще считают, что жизнь на Земле уникальна. Что нового дали космические исследования в этом отношении?

— В космических исследованиях поиск внеземной жизни занимает важное место. Если программа полета допускала возможность пролить дополнительный свет на этот вопрос, такой случай, как правило, не упускали. На космических аппаратах устанавливались специальные приборы (например, на посадочном блоке марсианского «Викинга» имелась биологическая лаборатория). И хотя признаков жизнедеятельности нигде обнаружить не удалось, я думаю, пессимистические выводы делать еще рано. Конечно, то, что мы знаем сегодня о Марсе, делает обнаружение даже самых примитивных форм жизни на нем мало вероятным. Да и вообще мало шансов, что где-нибудь в Солнечной системе это удастся сделать. Однако исследования дали много важных данных о так называемой предбиологической эволюции молекул. Почти полный набор оснований аминокислот имеется и в составе лунного грунта, и в метеоритном веществе, которое падает на Землю. Это означает, что так называемый абиогенный синтез — подготовка исходных «кирпичиков» для дальнейшего скачка на уровень гена — в космических условиях при наличии всевозможных экзотических излучений, таких как рентгеновское, имеет место. И конечно, при будущих полетах к Марсу и другим, более удаленным от нас небесным телам такую возможность биологических или, как минимум, предбиологических исследований будут учитывать.

— Многие ученые считают целесообразным искать проявление деятельности внеземных цивилизаций среди небесных тел, в «поведении» которых имеются какие-либо аномалии. В свое время внимание астрономов привлекли Тунгусский метеорит, спутники Марса, некоторые кометы... Есть ли сегодня небесные тела, находящиеся у астрономов «на подозрении»?

Этапы освоения космического пространства

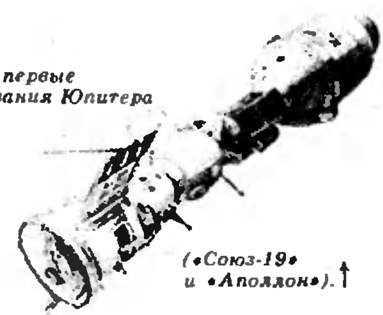


*17.XI — первый самоходный аппарат на Луне («Луноход-1»).
15.XII — первая мягкая посадка КА на Венеру («Венера-7»).* ←

1971
*19.IV — вывод на орбиту первой орбитальной станции («Салют»).
2.XII — первая мягкая посадка КА на Марс («Марс-3»).*

1973
4.XII — первые исследования Юпитера межпланетным КА с пролетной траектории («Пионер-10»).

1975
17.VII — первая стыковка космических кораблей разных стран



(«Союз-19» и «Аполлон»). ↑

1979
1.IX — первые исследования Сатурна КА с пролетной траектории

— К сожалению, сегодня нет объектов, которые можно было бы считать «подозрительными» с такой точки зрения. В той или иной мере на основе астрофизических гипотез, физических моделей можно объяснить кажущиеся аномалии в поведении тех или иных космических тел. По крайней мере, в той степени, в какой это позволяют сделать известные факты. В то же время, радиоастрономы одной из своих главных задач считают поиски объектов с аномальными характеристиками. Это направление имеет шансы обнаружить по-настоящему аномальные объекты.

— Главный вопрос современности — вопрос о мире. Может ли международное сотрудничество в космосе стать альтернативой программе «звездных войн»? Каким вы его себе представляете?

— Безусловно, мирное международное сотрудничество в любой форме является альтернативой милитаризации космического пространства. Невозможно насыщать околоземные орбиты многочисленными КА военного назначения и в то же время рассчитывать на серьезные дорогостоящие международные научные или, скажем, коммерческие проекты. Эти два направления приходят в глубокий конфликт. И не случайно поэтому сторонники мирного космоса, звездного мира, активно выступают против использования космоса в военных целях.

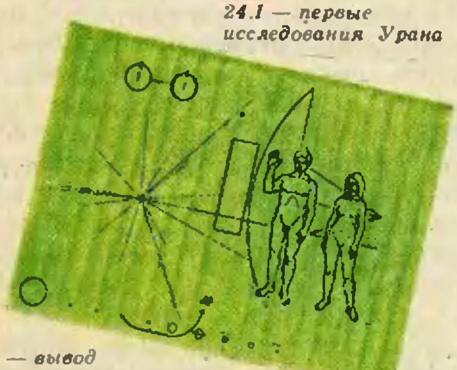
Уже сегодня имеется достаточно много конкретных областей космических исследований, в которых осуществляется международное сотрудничество, в частности, это программа «Интеркосмос», включающая в себя изучение космического пространства беспилотными аппаратами, пилотируемые полеты и т. д. В рамках международного сотрудничества в 1986 году успешно завершились исследования кометы Галлея. В середине 1988 года начнется осуществление проекта «Фобос». Его цель — изучение одного из спутников Марса. Инициаторами проекта стали советские ученые, а научную аппаратуру для «Фобоса» готовят специалисты разных стран.

— «Космическая одиссея 2001 года» уже не за горами. Какой она будет? Ведь в ней примут участие и нынешние читатели журнала «Квант». Что вы можете им пожелать?

— Думаю, ее сценарий будет писаться тогда, когда сегодняшние читатели «Кванта» станут специалистами. До этого осталось не так много, может быть, 5—7 лет. И чем раньше нынешние школьники займут активную творческую позицию, тем больших результатов они добьются (и совсем не обязательно ждать, когда они станут пятидесятилетними!).

Желаю им успехов!

(«Пионер-11»). (На снимке — пластинка-послание с «Пионера-11».)

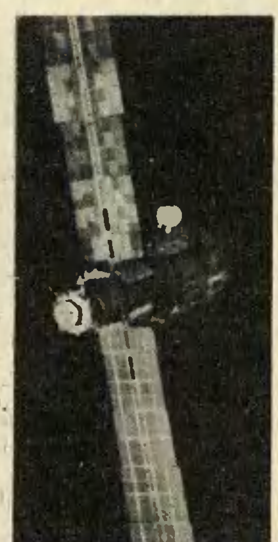


1981
12.IV — вывод на орбиту первого многоразового корабля «Спейс шаттл» («Колумбия»

с космонавтами Дж. Янгом и Р. Криппеном).

1986
24.I — первые исследования Урана КА с пролетной траектории («Вояджер-2»).

20.II — вывод на орбиту новой научной станции «Мир».



4.III — первые прямые исследования КА кометы Галлея («Вега-1»).

1987
9.IV — стыковка первого орбитального модуля («Квант») со станцией «Мир».

ВСТРЕЧА С КОМЕТОЙ ГАЛЛЕЯ СОСТОЯЛАСЬ!

Кандидат физико-математических наук
Т. К. БРЕУС

Кометы все еще остаются наименее изученными объектами Солнечной системы, хотя открывают их по нескольку штук в год. Причина в том, что появляются они неожиданно, а само тело кометы — ее ядро — недоступно для наземных наблюдений, поскольку скрыто сиянием колоссальной, в сотни тысяч раз большей самого ядра, головы, или «комы» — газово-пылевой атмосферы, возникающей при испарении кометного вещества, разогреваемого солнечным излучением при сближении кометы с Солнцем.

Комета Галлея зарекомендовала себя в прошлые возвращения как одна из наиболее ярких. Например, в 837 году она прошла в 6 млн км от Земли и была в 6,5 раза ярче Сириуса — самой яркой звезды земного небосвода. В 1910 году при пролете вблизи нашего светила комета оказалась между Землей и Солнцем. А так как хвосты комет всегда направлены от Солнца и тянутся на многие миллионы километров, Земля в течение нескольких часов летела сквозь хвост кометы.

В этот приход комету Галлея обнаружили на рекордно большом расстоянии — около 1,6 млрд км от нашей планеты и Солнца. Это было 16 октября 1982 года, когда комета находилась в созвездии Малого Пса и светила в 40 млн раз слабее самых слабых звезд, которые еще может видеть человек невооруженным глазом. Обычно кометы обнаруживают на расстояниях в 2—3 раза меньших, но на сей раз была использована самая совершенная техника, позволяющая регистрировать даже отдельные кванты света. Но вот из-за неблагоприятного расположения траектории кометы (в перигелии траектории Солнце оказалось между Землей и кометой) «пообщаться» с ней непосредственно с Земли как следует было невозможно. Этот недостаток с лихвой компенсировался запуском к комете сразу пяти космических аппаратов — двух советских («Вега-1», «Вега-2»)*), одного западно-европейского («Джотто») и двух японских.

В предыдущее появление кометы Галлея в 1910 году на нее были нацелены, главным образом, спектроскопы, с помощью которых астрономы уточняли состав головы и хвоста небесной гостьи. Еще раньше, в 1835—1836 годах, для исследования кометы Галлея был применен первый астрофизический прибор — изобретение выдающегося французского физика и астронома Араго — полярископ. Тогда было доказано, что хвосты комет светят, в основном, отраженным от Солнца светом, т. е. в них много пыли — распыленных каменистых частей ядра, отгоняемых в виде хвоста прочь от Солнца какими-то силами. Только в 1910 году, после того как русский физик П. Н. Лебедев показал, что свет может оказывать давление на частицы, образование пылевых кометных хвостов получило свое объяснение.

В 1836 году в научной литературе появились и высказывания о физической природе таинственного ядра кометы. Немецкий астроном Бессель выдвинул идею, согласно которой ядро состоит из летучих, т. е. легко возгоняющихся от жара веществ. Подобную мысль высказал некогда Лаплас. В третьем издании своего «Изложения системы мира» (1808 г.) он объяснил образование колоссальной головы и хвоста кометы быстрым испарением «жидкостей» с поверхности ядра близ Солнца. При уда-

*) Полет советских космических станций «Вега» осуществлялся в рамках Международной экспедиции «Венера — комета Галлея». О проекте «Вега» рассказывалось в статье Л. С. Марочника «Свидание с кометой» в «Кванте» № 5 за 1985 год.

лении кометы от нашего светила оставшиеся «жидкости» снова должны превращаться в лед, и так при каждом последующем возвращении.

В XX веке идея ледяного ядра кометы вновь возрождается американским астрофизиком Ф. Уипплом. Он предлагает модель (1950 г.), согласно которой кометное ядро представляет собой космический айсберг — монолитное тело неправильной формы, состоящее из замерзших летучих веществ (H_2O, CH_4, NH_3, CO_2 и др.), смешанных с частичками метеоритного вещества. Когда кометное ядро приближается к Солнцу, летучие вещества с его поверхности испаряются, и возникают потоки газа, которые увлекают за собой пылевые частицы,— образуются кома и хвост.

Советский астроном Б. А. Воронцов-Вельяминов полагал, что ядро кометы состоит в основном из тугоплавких веществ (силикаты, металлы) и только на поверхности имеется слой замерзших газов. Голландский астрофизик М. Гринберг в общем был согласен с Уипплом, но считал, что в гипотетический состав ядра надо «добавить» сложные органические вещества. Он предполагал, что ядро кометы представляет собой не айсберг, а, скорее, своего рода сугроб, причем состоит он из частиц межзвездного вещества, «спрессованных» в сложную структуру — цилиндрик длиной в несколько микрон, внутри силикатный, сверху слой органики, а поверх органики — слой льда.

Откуда же прилетают к нам космические гостьи? Где могли образоваться эти сложные конгломераты пыли, газов и даже органических молекул?

Существовало большое число гипотез о происхождении комет. В соответствии с одной из них, впервые предложенной Лагранжем (1788 г.), а затем развитой советским ученым С. К. Всехсвятским (1955 г.), кометные ядра могли выбрасываться из недр планет-гигантов и их спутников во время вулканических извержений. Когда американские «Вояджеры» обнаружили вулканическую деятельность на спутнике Юпитера Ио, это предположение обрело как бы «второе дыхание». Тем не менее отношение к этой гипотезе весьма скептическое — слишком много «но».

Большинство специалистов полагают, что получить ответ на вопрос о происхождении комет удалось выдающемуся голландскому астроному Яну Оорту. Конечно, в науке правильность той или иной гипотезы не решается большинством голосов, и только экспериментальные факты дают объективные доказательства. Тем не менее гипотеза Оорта (1950 г.) практически не имеет изъянов.

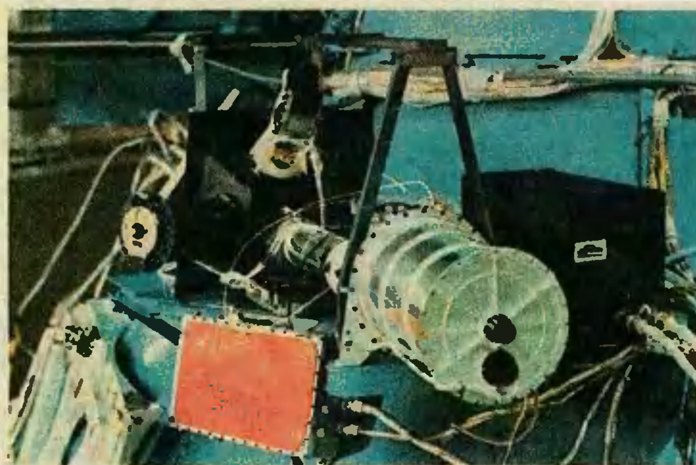
Оорт предположил, что Солнечная система окружена гигантским «облаком» комет, простирающимся на расстояниях от 20 000 до 200 000 астрономических единиц (1 а. е. $=$ $=$150 000 000 км) от Солнца, т. е. далеко за пределами планетной системы (орбита Плутона — последней планеты — порядка 40 а. е.).

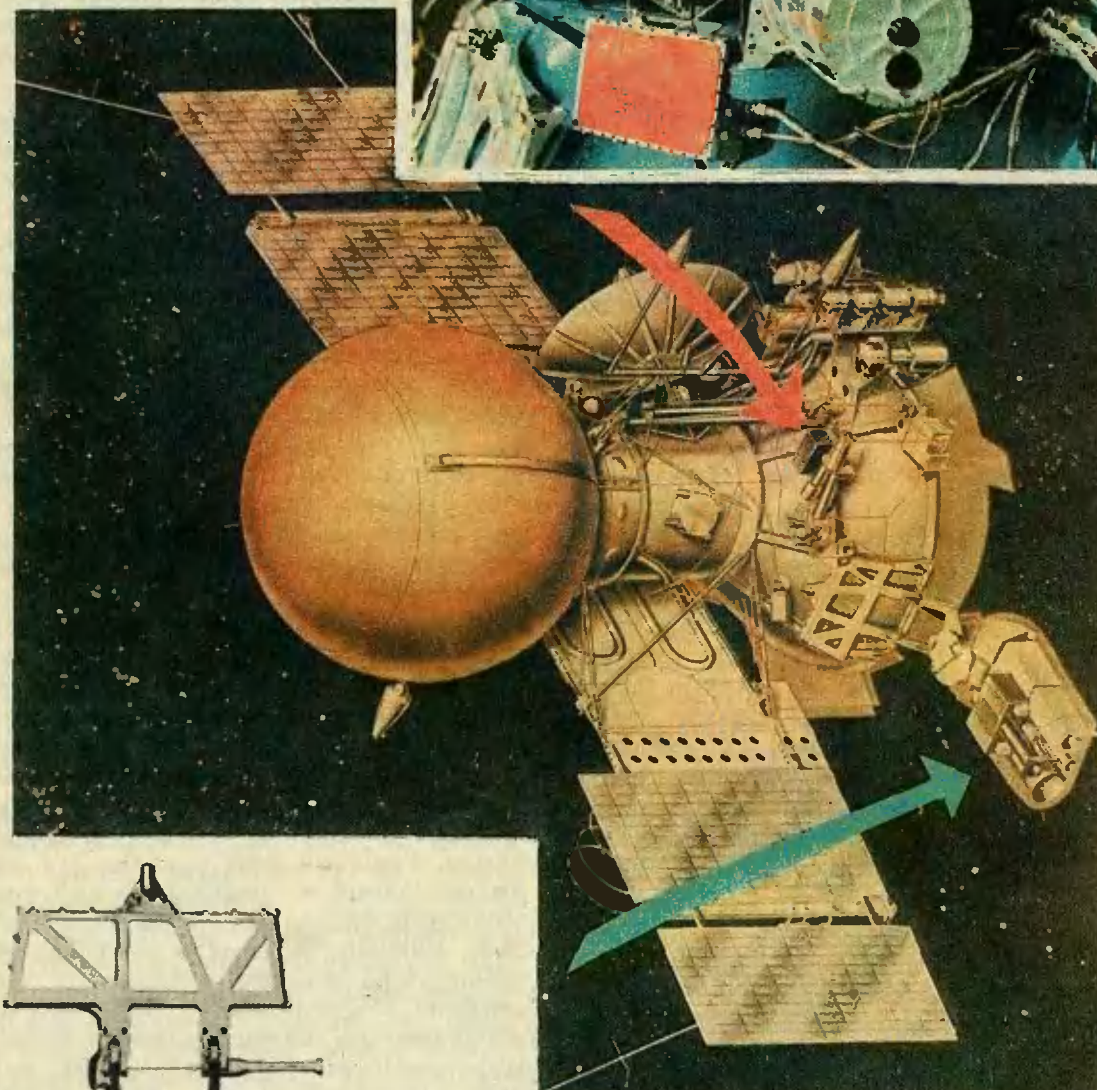
Что заставляет кометы покидать свое «пристанище»? Несмотря на то, что в облаке Оорта по оценкам должно содержаться $10^{11}\div10^{12}$ комет, их столкновения так редки*), что они не могут быть причиной, выталкивающей их из облака. Оказывается, ответственны за это близко проходящие звезды. Они хаотизируют скорости движения комет и время от времени выбрасывают их или за пределы Солнечной системы, или в сторону Солнца.

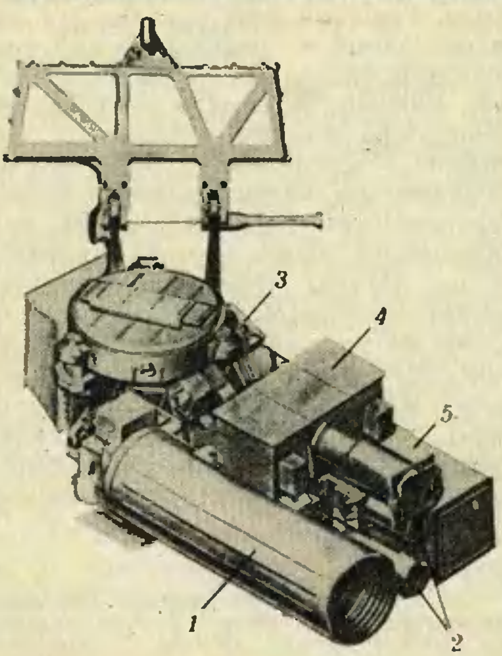
Остается, однако, неясным происхождение самого облака Оорта, или, как его называют, банка или сейфа комет. Решение этой проблемы и являлось одной из главных целей космической экспедиции к комете Галлея. Ученые надеялись, что наблюдение ядра кометы с близкого расстояния, определение его состава, исследование частиц кометы «руками» автоматов позволит понять, как образовался банк Оорта. Является ли он частью протопланетного вещества — газово-пылевой туманности, из которой примерно в одну эпоху возникли Солнце, планеты и кометы? Или, может быть, банк Оорта имеет галактическое происхождение? Например, уже после завершения своего формирования Солнечная си-

*) Время между столкновениями двух кометных ядер с типичным размером 1 км на четырнадцать порядков больше времени существования Солнечной системы.

Автоматическая межпланетная станция «Вега». Пылеударный масс-анализатор «ПУМА».







Автоматическая стабилизированная платформа с установленной на ней аппаратурой. В состав телевизионной системы входит узкоугольная камера высокого разрешения (1), широкоугольная камера-датчик наведения (2) и электронный блок телевизионной установки (3). На платформе установлены также трехканальный спектрометр (4) и инфракрасный спектрометр (5).

стема могла пролететь через гигантское облако межзвездного газа и захватить содержавшиеся в нем пыль, газ, органические соединения, а возможно, и готовые кометные ядра.

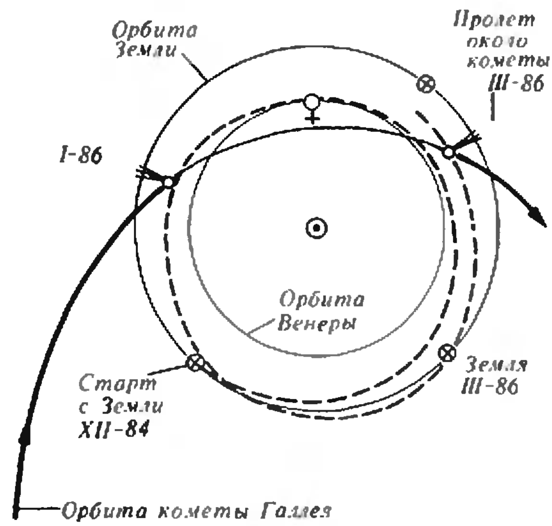
Кстати, радиоастрономическими методами было обнаружено в газово-пылевых облаках в Галактике несколько типов органических соединений — формальдегиды, синильная кислота, спирты — исходные продукты для образования наиболее сложных производных углерода — аминокислот, которые являются «строительными блоками» белка. Следы органических соединений регистрировались в ходе наземных наблюдений и у комет. В метеоритах находят даже сами аминокислоты.

Возможно, метеориты (как и кометы) являются «мусором» на строительной площадке, где создавалась Солнечная система. Однако они уже изрядно «подпорчены» Солнцем. Кометы же хранились на большом удалении от него, как бы в холодильнике, не подвергаясь воздействию излучений, и поэтому должны были сохранить свои первичные свойства.

Вот почему ученые с таким нетерпением ждали свидания с кометой Галлея.

Самой важной задачей в проекте «Вега» было исследование физических характеристик ядра кометы. Использовались два подхода: во-первых, дистанционные измерения при помощи оптических приборов и, во-вторых, прямые исследования вещества (газа и пыли), покидающего ядро и пересекающего траекторию, по которой движется аппарат.

Оптические приборы размещались на специальной платформе, которая поворачивалась во время пролета ядра и автоматически отслеживала направление на него. Одним из главных элементов оптического комплекса была телевизионная система. В комплекс входили также приборы, которые должны были обеспечивать проведение детальных спектроскопических исследований химического состава различных областей атмосферы (комы) и хвоста кометы. Одним из важнейших направлений этих исследований был поиск первичных, или, как их еще называют, «родительских», молекул. Наземными спектроскопическими измерениями



Общая схема полета станций «Вега».

обнаружить эти молекулы невозможно. Дело в том, что при переходе кометного льда из твердого состояния непосредственно в газообразное газ вылетает с поверхности кометы почти со скоростью звука, и в районе ядра плотность его очень велика. Поэтому молекулы интенсивно взаимодействуют друг с другом и в них происходят существенные химические изменения. В ходе этих процессов образуются так называемые «дочерние», т. е. вторичные, молекулы. Они-то и «регистрируются» наземными спектроскопическими измерениями.

Оптические исследования газового состава атмосферы кометы должны были дополняться его измерениями при помощи специального пылеударного масс-анализатора (ПУМА).

Как уже отмечалось, кометная атмосфера состоит не только из газовых, но и из пылевых частиц. При относительной скорости сближения космического аппарата с кометой почти 80 км/с эта пыль представляла большую опасность. Для защиты аппаратов были созданы специальные многослойные экраны. Но именно большая относительная скорость и была использована для определения состава частиц. Если на пути такой «пылинки» поставить мишень, то при ударе о нее частица взрывообразно испаряется, ионизируется и превращается в облачко плазмы. Масс-спектрометр определит ее состав, а следовательно, и состав ядра кометы, из которого эта частица вырвалась.

Такова идея эксперимента ПУМА (научные руководители Р. З. Сагдеев (СССР), У. Киссель (Общество имени Макса Планка, ФРГ), Ж. Л. Берто (Франция)).

Ряд приборов предназначался для измерения физических характеристик пылевого потока — числа частиц разной массы, их размеров, плотности.

На борту станций были также установлены многочисленные приборы для изучения взаимодействия кометных ионов с межпланетной средой, заполненной, как известно, плазмой, испускаемой солнечной короной, — солнечным ветром.

Что же нового узнали мы в эту встречу с кометой?

Анализ телевизионных изображений, переданных с борта станций на Землю, показал, что ядро кометы Галлея представляет собой монолитное тело неправильной формы. Размеры его $8\times8\times16$ км. Это намного больше, чем предполагали ученые (2—5 км). Объем ядра, по грубым прикидкам, составляет примерно $5\cdot10^{11}$ м^3. Ядро вращается вокруг оси, которая расположена внутри конуса раствором $\pm45^\circ$ от нормали к плоскости орбиты. Направление вращения совпадает с направлением орбитального движения. Отражательная способность ядра очень низкая. Ядро кометы — одно из самых темных тел Солнечной системы. Выброс пыли происходит только на освещенной части ядра. На поверхности имеется несколько областей (примерно 10 % площади), из которых пыль уходит сравнительно узкими потоками (струями). Пыль, однако, покидает поверхность и вне струй. Над поверхностью имеется тонкий (около 1 км) слой, внутри которого пыль разгоняется потоком газа от нулевой скорости до нескольких сотен метров в секунду. На поверхности видны детали, напоминающие кольцевые кратеры.

Снимки, полученные западно-европейским аппаратом «Джотто», добавили к этой картине уточнение только в последнем вопросе: кольцевые кратеры, несомненно, реальны; они хорошо видны на обработанных снимках вблизи терминатора (границы тени и света), где пыли над поверхностью мало, а условия освещения наиболее благоприятны.

Измерения теплового излучения ядра, выполненные спектрометром «Веги-1», позволили определить температуру поверхности. Из предварительных расчетов, основанных на условии теплового баланса, следовало, что на дневной стороне кометы она должна составлять 200 К. Однако измерения дали вдвое большее значение $T=380\pm30$ К.

Это можно объяснить, полагает советский ученый В. И. Мороз, если предположить, что поверхность ядра покрыта слоем «грязи» (аналогично тому, как это часто бывает весной в городах со снежными сугробами). Этот слой поглощает солнечную энергию, часть ее переизлучается в инфракрасном диапазоне, а часть передается за счет теплопроводности вниз, к внутренней «чистой» поверхности ядра, на которой температура около 200 К.

Какова структура этого слоя? Толщина его, скорее всего, не больше 0,1 мм, иначе он сильно ослаблял бы газовый поток. В то же время он должен быть сплошным, иначе ядро не было бы таким черным. По-видимому, в нем много мелких частиц, и газ свободно проходит через поры. Поверхностный слой в отдельных местах время от времени взламывается, и тогда образуется активная область с особо мощным истечением вещества.

Образование такого слоя представляется вполне естественным, если вспомнить, что кометный лед перемешан с частичками тугоплавких веществ, и при испарении после ухода газа концентрация их на поверхности увеличивается.

Температура 380 К относится к самой теплой точке ядра, которая находится на дневной стороне на экваторе. Эта точка смещена от полуденной примерно на один час вследствие тепловой инерции поверхностного слоя. На ночной стороне гораздо холоднее; по косвенным оценкам температура здесь 180—200 К.

Удалось оценить массу и среднюю плотность ядра кометы. Масса определялась по реактивному эффекту, который создавался выбросом газа и пыли в сторону Солнца. Расчеты выполнялись независимо шведским ученым Г. Рикманом и советскими учеными Р. З. Сагдеевым, П. Е. Эльясбергом, В. И. Морозом. Результаты получились близкие — масса ядра кометы составляет $(0{,}5—2)\cdot 10^{14}$ кг. Таким образом, средняя плотность вещества ядра (напомним, что объем его оценен в $5\cdot 10^{11}$ м^3) составляет 0,1—0,4 г/см^3.

Интересные результаты дали измерения количественных характеристик пылевого потока. Эксперименты с пылевыми счетчиками показали, что около миллиона тонн космической пыли покидает кометное ядро ежесуточно. Весьма неожиданным оказался характер распределения пылевых частиц по размерам; было обнаружено неожиданно большое количество малых частиц размером порядка сотой доли микрона.

Измерения показали, что в потоке газа, уходящего от кометы, больше всего водяного пара. Вторым по обилию компонентом является углекислый газ. Скорее всего, CO_2 и H_2O входят в состав ядра в виде клатрата — кристаллического соединения, в котором молекулы одного вещества (CO_2) «вкраплены» в кристаллическую решетку другого (лед H_2O).

Основную и совершенно новую информацию о химическом составе твердых частиц, которые входили в состав ядра и покинули его под давлением газовых потоков, дал эксперимент ПУМА (на «Вегах») и аналогичный эксперимент на «Джотто». Реально регистрировались частицы диаметром в сотые и десятые доли микрона, но их было очень много. В эксперименте ПУМА были получены спектры примерно 2000 таких частиц.

Из спектров следует, что по химическому составу твердые частицы кометной пыли можно разделить на три основных типа: в первом преобладают легкие элементы, во втором — углерод, в третьем — металлы. Советский физик Л. М. Мухин, анализировавший эти спектры, пришел к двум важным выводам. Первый — частицы, богатые углеродом, показывают отношение элементов C/Si, существенно большее, чем в метеоритах любого типа. Второй вывод — большое отношение C/Si всегда сопровождается присутствием азота, а это может быть объяснено только тем, что углерод и азот входят в состав органических молекул. Это является важным указанием на присутствие в составе ядра кометы сложных органических молекул.

Итак, в результате экспедиции космических аппаратов к комете Галлея удалось получить реальную картину объекта, ранее никогда не наблюдавшегося непосредственно, и попытаться ответить на вопрос о его природе. Однако в части, касающейся происхождения комет в Солнечной системе, выполненные исследования скорее задали новые вопросы.

Напомним, что анализ «проб» кометной пыли, испаренной ядром, показал, что она содержит частицы различной природы. Тугоплавкие силикатосодержащие пылинки существенно отличаются от легкоплавких пылинок с высоким содержанием сложных органических молекул.

Как же могли пылинки столь разной температурной истории оказаться в одном и том же месте, где сформировались кометы? Если они образовались в протопланетном облаке, то, вероятно, в разных местах, а уже потом они каким-то образом перемещались и очутились в сейфе Оорта. А может быть, состав кометной пыли прямо отражает состав пыли межзвездной среды, в которой началось формирование протосолнечного облака и протопланетной системы?

Решающий ответ могла бы дать доставка на Землю кометного вещества и исследование его изотопного состава. Если окажется, что кометные частицы являются не метаморфизованными, т. е. неизмененными межзвездными частицами, то это будет сильный, хотя и не окончательный, аргумент в пользу того, что кометные ядра образуются в плотных облаках межзвездного вещества, и они, эти облака, а не первичная протопланетная туманность, являются источником комет, попавших со временем в банк Оорта.

В сущности, каких-то непреодолимых технических трудностей для проведения таких исследований нет даже на современном уровне развития космонавтики, и ученые уже обсуждают такую возможность. Среди комет есть и такие, к ядру которых можно было бы приблизиться вплоть до прямого контакта. Возможно, такой полет будет выполнен в конце этого — начале следующего столетия.

ЗАГАДКА РАМАНУДЖАНА

(к столетию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что действительно он часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы.

Сешу Айар и Рамачандра Рао

Письмо в Кембридж

В самом начале 1913 года профессор Кембриджского университета Г. Г. Харди получил письмо из далекого Мадраса. В свои 36 лет Харди был уже одним из крупнейших специалистов по анализу и теории чисел, автором ряда великолепных математических работ. Отправитель же письма, Сриниваза Рамануджан, работал клерком в бухгалтерии почтового ведомства Мадраса с более чем скромным окладом в 20 фунтов в год. Он сообщал о себе, что не имеет университетского образования и после окончания школы самостоятельно занимается математикой, не следуя принятой системе, а «избрав свою дорогу». Математическое содержание письма выглядит достаточно неуклюже — вполне можно принять автора за самоуверенного любителя.

Само по себе такое письмо не могло произвести на Харди сильного впечатления. Но к письму было приложено некоторое количество формул, которые предлагалось опубликовать, если они интересны, чего сам автор не мог сделать из-за своей бедности. Просмотр формул насторожил Харди: он понял, что имеет дело с незаурядным явлением. Он заинтересованно отвечает Рамануджану, между ними завязывается интенсивная переписка (сегодня кажется удивительным, как быстро шли тогда письма между Индией и Англией). Постепенно у Харди собирается около 120 разнообразных формул.

Формулы Рамануджана касались в основном соотношений между бесконечными радикалами (вставка 2), бесконечными рядами, произведениями и цепными дробями (вставки 1, 3, 4), тождеств между интегралами. Прежде всего было ясно, что они далеко выходят за пределы

Вставка 1. Пример бесконечной суммы, вычисленной Рамануджаном

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}.$$

Эта удивительная формула — одна из приложенных Рамануджаном к первому письму Харди. Каким образом сумма знакочередующегося ряда $a_0+a_1+a_2+\ldots$ с общим членом

$$a_n=(-1)^n(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\right)^3$$

может вдруг оказаться равной $2/\pi$, Харди долго не мог понять. В справедливости этой формулы, как приближенного равенства, читатель может убедиться с помощью калькулятора. Доказательство точного равенства неэлементарно.

Вставка 2. Бесконечно повторяющиеся радикалы

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3.$$

Эту красивую формулу Рамануджан получил еще в школьные годы следующим образом: он написал последовательность очевидных равенств

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}=\ldots,$$

а затем подставил $n=1$. Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, читатель может попробовать самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}=4.$$

элементарной математики. Далее возникает цепь вопросов: известны ли они; если да, то самостоятельно ли получены автором письма; если нет, то верны ли они? Вскоре Харди понимает, что ситуация парадоксальна: он, несомненно, выдающийся специалист по современному анализу, имеет дело с россыпью неизвестных ему формул!

Большое впечатление на Харди произвели формулы с бесконечными рядами (см. вставку 1). После их изучения он приходит к выводу:

«...в распоряжении Рамануджана должны быть какие-то очень общие теоремы, которые он от меня скрывает».

Но особо удивили Харди соотношения с бесконечными цепными дробями (одно из более поздних соотношений этого типа показано на вставке 3):

«...эти соотношения поставили меня полностью в тупик; я никогда не видел ничего подобного. Достаточно бросить на них один взгляд, чтобы убедиться в том, что они могли быть написаны только математиком самого высшего класса».

Чудо из Кумбаконама

Как же сложился математик, который так удивил Харди? Сринивaза Рамануджан Айенгор родился 22 декабря 1887 г. на юге Индии в селении Эрод. Его детство в основном протекало в маленьком городке Кумбаконам (в 260 км от Мадраса), где его отец работал бухгалтером в небольшой текстильной лавке. Рамануджан принадлежал к касте браминов, но богатство уже давно не было уделом его родственников. Его родители, а мать особенно, были глубоко религиозны. Рамануджан получил воспитание в традициях касты. Детство, проведенное в городе, где каждый камень связан с древней религией, в окружении людей, постоянно ощущающих свою принадлежность к высшей касте, сыграло большую роль в становлении Рамануджана.

С 5 лет Рамануджан в школе, к 10 годам он заканчивает начальную школу. Он начинает проявлять незаурядные способности, получает стипендию, обеспечивающую обучение в средней школе за половинную плату. В 14 лет студент из Мадраса дает ему двухтомное руководство по тригонометрии Лони. Вскоре Рамануджан изучил тригонометрию, и студент имел возможность пользоваться его консультацией в решении задач. К этому периоду относятся первые рассказы и легенды. Утверждается, что он сам открыл «формулу Эйлера о синусе и косинусе» и был очень расстроен, найдя эту формулу во втором томе Лони.

«Маленький брамин» полагает, что в математике, как и в других науках, следует искать присущую ей «высшую истину», расспрашивает учителей. Старшие дают маловразумительные ссылки на теорему Пифагора, а то и на вычисления с процентами.

Вставка 3. Числовое тождество с бесконечной суммой и цепной дробью

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{1+\ldots}}}}}=\sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Это, возможно, самая красивая формула Рамануджана, истинное произведение математического искусства. Она неожиданно связывает бесконечный ряд и бесконечную цепную дробь. Удивительно, что ни ряд, ни цепная дробь не выражаются через известные постоянные π и e, а их сумма непостижимым образом оказывается равной $\sqrt{\pi e/2}$!

«Синопсис элементарных результатов чистой и прикладной математики»

Это двухтомное руководство английского математика Карра, написанное в 1880—1886 гг., попало к Рамануджану в 1903 г.— ему было тогда 16 лет. Эта книга сыграла огромную роль в формировании Рамануджана. В ней было собрано 6165 теорем и формул, почти без доказательств, с минимальными пояснениями. В основном книга посвящена алгебре, тригонометрии, анализу, аналитической геометрии.

Книга Карра стимулировала мальчика к самостоятельному выводу формул. Об этом говорят те, кто знал Рамануджана в эти годы. Постепенно меняется область его основных интересов: магические квадраты, потом квадратура круга (он находит π с точностью, позволяющей вычислить длину экватора с ошибкой, не превышающей 1—2 м, гласит легенда) и, наконец, наступает очередь бесконечных рядов. Это уже начало подлинной математической жизни!

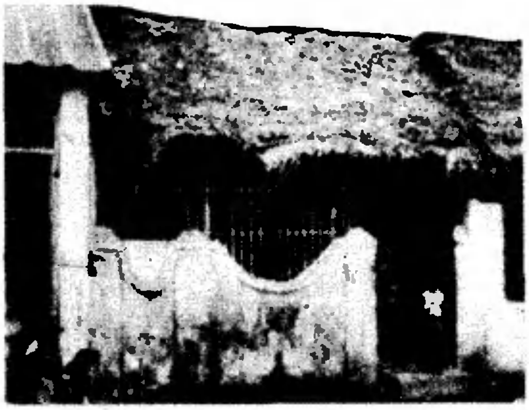
Книга Карра оказалась достаточно удачной для того, чтобы сформировать математический мир Рамануджана. Но ориентировка на эту книгу имела и другие последствия. Поскольку книга не содержала доказательств, а в лучшем случае — наводящие соображения, у Рамануджана складывается своеобразный метод установления математической истины. К тому же он лишен в Индии подходящих руководств для того, чтобы проводить строгие доказательства.

«Его понимание сущности математического доказательства было более чем туманным; он пришел ко всем своим результатам, как ранним, так и более поздним, как верным, так и неверным, при помощи странной смеси интуитивных догадок, индуктивных соображений и логических рассуждений...»

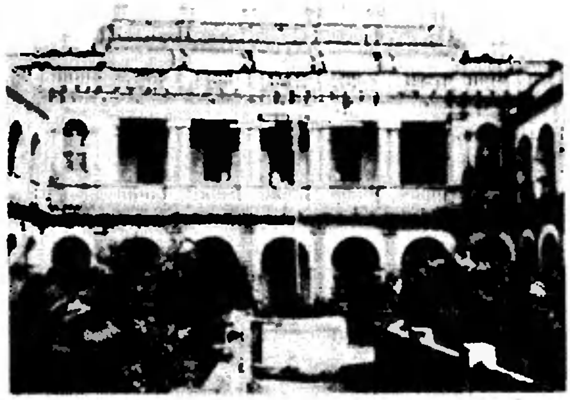
Математическая судьба Рамануджана фактически полностью решилась в эти годы — направление научных поисков, способ думать он уже никогда не менял. Здесь можно выразить сожаление, что Рамануджан формировался в тяжелых условиях. В нормальных условиях он, несомненно, стал бы математиком с лучшей профессиональной подготовкой, но можно ли быть уверенным, что он был бы столь же уникален? Смог бы Рамануджан увидеть так много, если бы с детства был обучен правилам поведения в математике и доводил бы свои результаты до публикаций со строгими доказательствами, строил бы свой математический мир на базе всего достигнутого человечеством, а не на сравнительно небольшом числе фактов?

От чисел к формулам

В формировании математического мира Рамануджана было важно, что начальный запас математических фактов (в основном почерпнутый из книги Карра) объединился у него с огромным запасом наблюдений над конкретными числами. Он коллекционировал такие факты с детства. Его школьный товарищ вспоминал, что

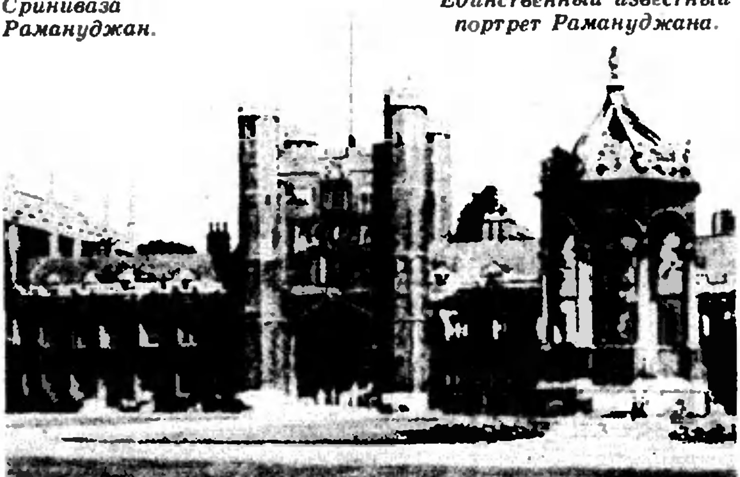


Дом в Кумбаконаме, недалеко от Мадраса, в котором провел детство Рамануджан.



Здание школы в Кумбаконаме: здесь получил среднее образование и начал самостоятельные исследования Рамануджан.

Единственный известный портрет Рамануджана.



Одно из зданий Кембриджского университета — Тринити-колледж. Здесь с 1914 по 1919 годы работал Сриниваза Рамануджан.

Гордон Гарольд Харди (1877—1947), известный английский математик, профессор Кембриджского университета, друг и соавтор Рамануджана. Фотография начала 1900-х годов.

Рамануджан знал огромное число знаков в разложениях e, π и других чисел в десятичные дроби. Он обладал поразительными способностями подмечать арифметические закономерности, терпеливо рассматривая огромный числовой материал — искусство, которым виртуозно владели Эйлер и Гаусс, но которое было в значительной степени утрачено к XX веку. Многое в числовой кладовой открывалось при случайных обстоятельствах. Харди позднее вспоминал, как он навестил в больнице Рамануджана и сказал, что он приехал на такси со «скучным» номером 1729. Рамануджан разволновался и воскликнул: «Харди, ну как же, Харди, это же число — наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы кубов двумя различными способами!» ($1729=1^3+12^3=9^3+10^3$). В книге Харди о творчестве Рамануджана метко сказано, что «каждое натуральное число было личным другом Рамануджана».

Рамануджан стремительно пополняет запас фактов, почерпнутый у Карра. Он при этом с удивительной скоростью переоткрывает результаты Эйлера, Гаусса, Якоби. Так, некогда юный Гаусс в Брауншвейге, лишенный литературы, реконструировал в короткий срок то, на что у его великих предшественников ушли десятилетия. Можно только удивляться, что реконструкции математики с такими скоростями возможны.

Постепенно коллекция наблюдений над конкретными числами уходит у Рамануджана на второй план перед миром формул. Формулы для него — не вспомогательное средство для доказательств или вычислений, но представляют самостоятельную цель. Внутренняя красота формулы имеет для Рамануджана бесконечную ценность. Его формулы можно рассматривать как прекрасные картины.

Выбор профессии

В 1904 г. Рамануджан поступает в Мадрасский университет, делает первые успехи не только в математике, но и в английском языке. Однако математика начинает занимать его целиком, и это не замедлило сказаться. Он не кончает даже первого курса, странствует с другом, делает попытку вернуться в университет, а затем закончить его экстерном (1907 г.). Но все безуспешно. В 1909 г. он женится; его жене девять лет, и она доживет до наших дней, трогательно сохраняя память о великом супруге. Рамануджан вынужден думать о средствах на жизнь, но он не может найти подходящего занятия. В 1910 г. он показывает свои математические результаты Рамасвари Айяру, основателю Индийского математического общества, затем Сешу Айяру, преподавателю Кумбаконамского колледжа, и Рамачандра Рао, крупному чиновнику, получившему математическое образование; позднее они стали биографами Рамануджана.

Рао помогает ему из своих средств, а затем устраивает клерком в почтовое управление. В 1911 г. появляется в печати сообщение Сешу Айяра о результатах Рамануджана, а затем и его собственная статья. В судьбе Рамануджана начинают принимать участие влиятельные английские чиновники; с 1 мая 1913 г. на два года он обеспечен специальной стипендией в 75 рупий (5 фунтов) в месяц. Этого хватает на скромную жизнь, и Рамануджан оставляет карьеру клерка. Он становится «профессиональным математиком».

Итак, Рамануджан встретил среди окружающих определенное признание, но не понимание. Мы помним, что в начале 1913 г. он пишет Харди. Чего он ожидал от Харди? Найти, наконец, человека, способного понять и оценить его результаты, помочь и направить его дальнейшие исследования? Скорее повод был более прозаическим: от внешнего мира ему требовались не слава и признание, но обеспечение возможности существовать.

Надо сказать, что в научном плане адресат был выбран исключительно удачно: трудно было бы найти другого математика в мире, который смог бы так быстро и эффективно сориентироваться в результатах Рамануджана. Очень скоро Харди понимает, что от него требуется не оценка результатов безвестного любителя или младшего коллеги, но спасение огромного дарования. Одновременно его не оставляет мысль, что Рамануджан сообщает лишь немногое из того, что знает, что он обладает очень общими результатами, приводя лишь

Вставка 4. Тождество Роджерса — Рамануджана
Это тождество

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^9}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^6)(1-x^{11})\cdot\ldots\cdot(1-x^4)(1-x^9)(1-x^{14})}.$$

Рамануджан нашел в 1911 году, но не сумел его доказать. Не сумел его доказать и Харди. В 1917 году, просматривая журнальную литературу (что он делал довольно редко), Рамануджан наткнулся на оставшуюся незамеченной статью английского математика Роджерса 1894 года, где эта формула была доказана. Оказалось, далее, что это тождество тесно связано с числом $p(n)$ разбиений на слагаемые (см. вставку 5). А совсем недавно оно появилось в исследованиях ... по статистической физике.

частные иллюстрации. Но главное — он не может реконструировать метод Рамануджана, и ему не терпится узнать, каким путем двигался его удивительный корреспондент. Неожиданно Рамануджан твердо отказывается описывать свой метод. В письме от 27 февраля 1913 г.:

«...Вы просите меня сообщить мои методы доказательств... Вот, что я хочу Вам сказать: проверьте мои результаты, и если они совпадают с Вашими, то Вы должны, по крайней мере, согласиться с тем, что в моих основных рассуждениях имеется какое-то зерно истины».

Харди подозревает, что Рамануджан боится, что его методами могут воспользоваться, пытается рассеять опасения, но 17 апреля получает ответ:

«Ваше последнее письмо причинило мне боль... Я нисколько не опасаюсь того, что мои методы будут использованы другими. Напротив, я работаю моими методами 8 лет и не нашел никого, кто бы понимал или оценил их. Как я уже писал в моем последнем письме, я нашел в Вас внимательного и понимающего друга и готов передать в Ваше полное распоряжение те немногие результаты, которыми я располагаю. Только в силу новизны моих методов я не решаюсь даже сейчас сообщить Вам мой путь вывода тех формул, которые я сообщил Вам в моих предыдущих письмах...».

Для Харди не было сомнений: для Рамануджана необходимы контакты

Вставка 5. Теорема Харди — Рамануджана
Эта теорема дает оценку числа $p(n)$ разбиений натурального числа n на натуральные слагаемые. (Например, $p(5)=7$, так как $5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1$.) Именно,

$$p(n)\sim A_n e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}},$$

$$\text{где } A_n=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{\sqrt{6(n-1/24)}}-\frac{1}{2(n-1/24)^{3/2}}\right)\text{ —}$$

функция от n. Например, при $n=200$ «приближенная» формула Харди — Рамануджана дает $p(200)=3\,972\,999\,029\,388$. Это — точный ответ! Наиболее загадочна в формуле для $p(n)$ маленькая «поправочка» $(-1/24)$, придуманная Рамануджаном. Никто — ни Харди, ни даже сам Рамануджан — не сумел объяснить, откуда она взялась. Опять вмешательство богини Намаккаль? Так или иначе, именно эта таинственная поправка обеспечила точность оценки. Однако Харди и Рамануджан не ограничились приближенной формулой: впоследствии они получили точное р а в е н с т в о для вычисления $p(n)$.

с настоящими математиками. Обеспечить в Индии это невозможно, и ему необходимо срочно перебраться в Англию. Удалось договориться о стипендии в Кембридже. Однако предстояло убедить в необходимости поездки самого Рамануджана, которого нынешнее положение вполне устраивало. К тому же против поездки категорически возражала мать, согласие которой было для сына обязательным. Друзья пытаются сформировать общественное мнение, активно действует кембриджский математик Невил, в начале 1914 г. посетивший Мадрас. Он обращается к ректору университета за поддержкой, но безуспешно.

То, что было не под силу ученым, легко осилила... богиня Намаккаль (согласно легенде, из ее уст во сне Рамануджан узнавал новые формулы). Мать увидела во сне сына, сидящего в большом зале в окружении европейцев, и богиня повелела не противиться отъезду. 17 марта 1914 г. Рамануджан отбыл в Англию. Он будет два года получать стипендию по 250 фунтов стерлингов в год. Из них 50 фунтов будет получать мать. По приезде вскоре стипендия была еще увеличена на 60 фунтов.

В Кембридже

Рамануджану 27 лет. Лучшие годы для становления математика прожиты в Индии без контакта с серьезными учеными, без доступа к математической литературе. В разных странах, в разные времена человек ощущает себя сложившимся в разном возрасте. Для Индии начала века, с очень низкой продолжительностью жизни, 27 лет — возраст зрелого человека. Вдова Рамануджана вспоминала, что он любил составлять гороскопы, и его собственный гороскоп предсказывал ему смерть до достижения 35-летнего возраста.

Харди предстояло принять очень ответственное решение: надо ли прервать занятия Рамануджана с тем, чтобы он смог освоить современную математику? Харди принял, по-видимому, единственно возможное решение: не менять стиля и направлений исследования Рамануджана, лишь по возможности корректируя их с учетом современной математики и стараясь объяснять новые вещи, обращая внимание на подходящую литературу. Харди писал:

«Его ум уже сложился, и он никогда не стал «ортодоксальным» математиком. Однако он еще был способен учить новые вещи и делал это весьма хорошо. Было невозможно обучать его систематически, но мало-помалу он воспринимал новые точки зрения. В частности, он усвоил, что такое доказательство, и его поздние статьи, при том что в некоторых отношениях они оставались необычными и индивидуальными, воспринимались как работы хорошо информированного математика. Однако его методы оставались по существу прежними».

Работает Рамануджан очень интенсивно и плодотворно. У него много общих интересов с Харди. Фантастическая интуиция Рамануджана, объединившись с рафинированной техникой Харди, дает замечательные плоды. К Рамануджану приходит признание: в 1918 г. он становится профессором университета в Кембридже; его выбирают в Королевское общество (английскую академию наук). Никогда прежде индус не удостаивался таких почестей.

Жилось Рамануджану непросто. Он строго следовал всем религиозным ограничениям, как и обещал родителям. В частности, он был вегетарианцем и был вынужден готовить себе сам. Он отказывался нарушать правила, даже когда тяжело заболел в 1917 г. Вероятно, нерегулярность в питании ускорила болезнь (так считал и сам Рамануджан, как вспоминала вдова). Оставшиеся два года в Англии Рамануджан, провел в больницах и санаториях, вынужденный ослабить интенсивность занятий математикой.

Непросто было вписаться Рамануджану в кембриджскую жизнь, полную чуждых условностей и традиций. Природная вежливость, стремление не быть источником для дискомфорта окружающим, так присущие индийской культуре, помогали Рамануджану по крайней мере внешне приспособиться к университетской жизни.

Харди очень много делал для Рамануджана: следил за его занятиями, стремился восполнить пробелы в его образовании, заботился о его положении в обществе и быте. Рамануджан до последней минуты был

(Окончание см. на с. 41)

Исполнилось 80 лет члену редколлегии журнала «Квант», действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Валентину Александровичу Фабриканту. Редколлегия и редакция поздравляют юбиляра и желают ему здоровья и новых успехов в благородной деятельности ученого, педагога и пропагандиста науки. Мы с удовольствием публикуем новую статью Валентина Александровича.

ЗАЧЕМ МЫ ЗИМОЙ ИСПОЛЬЗУЕМ ОТОПЛЕНИЕ?

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

Заметку с таким названием опубликовал в 1938 году известный немецкий астрофизик Роберт Эмден в английском журнале «Нейчур» («Природа»). «Нейчур» — своеобразный журнал, где оригинальные научные работы (а некоторые из них удостаиваются впоследствии Нобелевских премий) публикуются совместно с популярными статьями, написанными на различные темы.

Хотя заметка Р. Эмдена и была популярной, она все же не прошла незамеченной: выдержки из нее и ее обсуждение можно обнаружить в шестом томе курса теоретической физики А. Зоммерфельда — видного физика-теоретика, много сделавшего для развития боровской теории строения атома. Вот что пишет Р. Эмден в своей заметке: «На вопрос, почему мы топим зимой, неспециалист ответит: чтобы сделать комнату теплее; знаток термодинамики выразится, возможно, следующим образом: чтобы подвести недостающую энергию. В таком случае правым окажется профан, а не ученый». Разберемся, почему так.

Специалист имеет в виду внутреннюю энергию воздуха, которым заполнены наши дома, а в условиях, типичных для жилых помещений, воздух ведет себя как идеальный газ (точнее говоря, как смесь идеальных газов). Энергия идеального газа пропорциональна абсолютной температуре T и количеству вещества, т. е. массе газа m. Поэтому для внутренней энергии воздуха можно написать

$$U = amT, \qquad (1)$$

где a — некоторая постоянная.

Теперь становится очевидной та ошибка, которую допустил ученый. Он забыл, что в данной ситуации масса воздуха m является функцией температуры. И действительно — жилое помещение не изолировано от внешнего мира; при протапливании воздух, нагреваясь, расширяется и частично выходит сквозь щели и поры в стенах наружу. Чтобы определить зависимость m от T, воспользуемся уравнением Менделеева—Клапейрона для идеального газа:

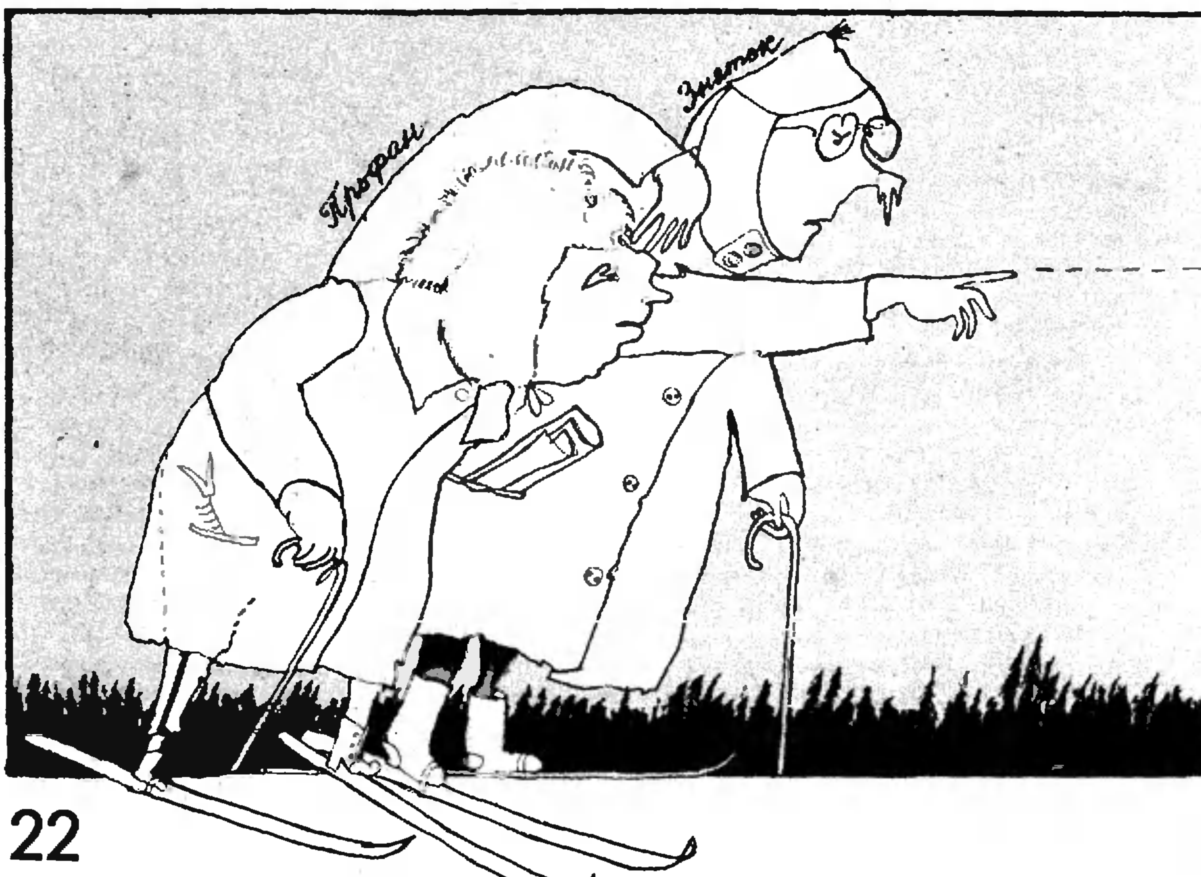
$$pV=\frac{m}{M}RT \qquad (2)$$

(M — молярная масса воздуха, R — универсальная газовая постоянная). Объем помещения V у нас не изменяется, давление p остается постоянным, равным внешнему давлению воздуха. Следовательно, правая часть уравнения (2) также должна, несмотря на изменение температуры, сохранять постоянное значение. Это возможно только при условии постоянства произведения mT.

Заметим, что обычно уравнение Менделеева—Клапейрона применяется в случаях, когда масса m фиксирована. В рассматриваемой нами задаче это условие не выполняется и, согласно уравнению (1), внутренняя энергия воздуха при постоянстве произведения mT должна оставаться неизменной. Увеличение средней кинетической энергии отдельной молекулы компенсируется уменьшением числа молекул.

Температура воздуха в помещении влияет на температурный режим работы человеческого тела. Слишком низкая температура вызывает сильное переохлаждение организма, в результате чего затрудняется протекание химических реакций, которые обеспечивают обмен веществ.

Будучи астрофизиком, Эмден не мог не вспомнить о роли Солнца как своеобразной «печки», что греет Землю своим излучением. Хотя Земля почти всю энергию, полученную от Солнца, излучает обратно в мировое пространство, оставшейся части энергии, которая, видоизменяясь, переходит в окружающую среду, вполне хватает, чтобы поддерживать на поверхности Земли необходимую для жизни температуру. Мощность солнечной энергии, падающей на единицу площади земной поверхности, определяет уровень температуры T (чем объясняется смена времен года и наличие климатических поясов), а тепло недр Земли составляет тысячные доли от тепла солнечных лучей, и его совершенно недостаточно для поддержания жизни. Поэтому опасность ядерной войны, по современным подсчетам ученых, состоит не только в разрушениях и непосредственном воздействии взрывов на живые организмы, но и в возникновении «ядерной зимы» — ведь многочисленные пожары вызовут огромные тучи копоти и сажи, которые будут непроницаемы для солнечных лучей. Эти тучи окутают всю Землю,



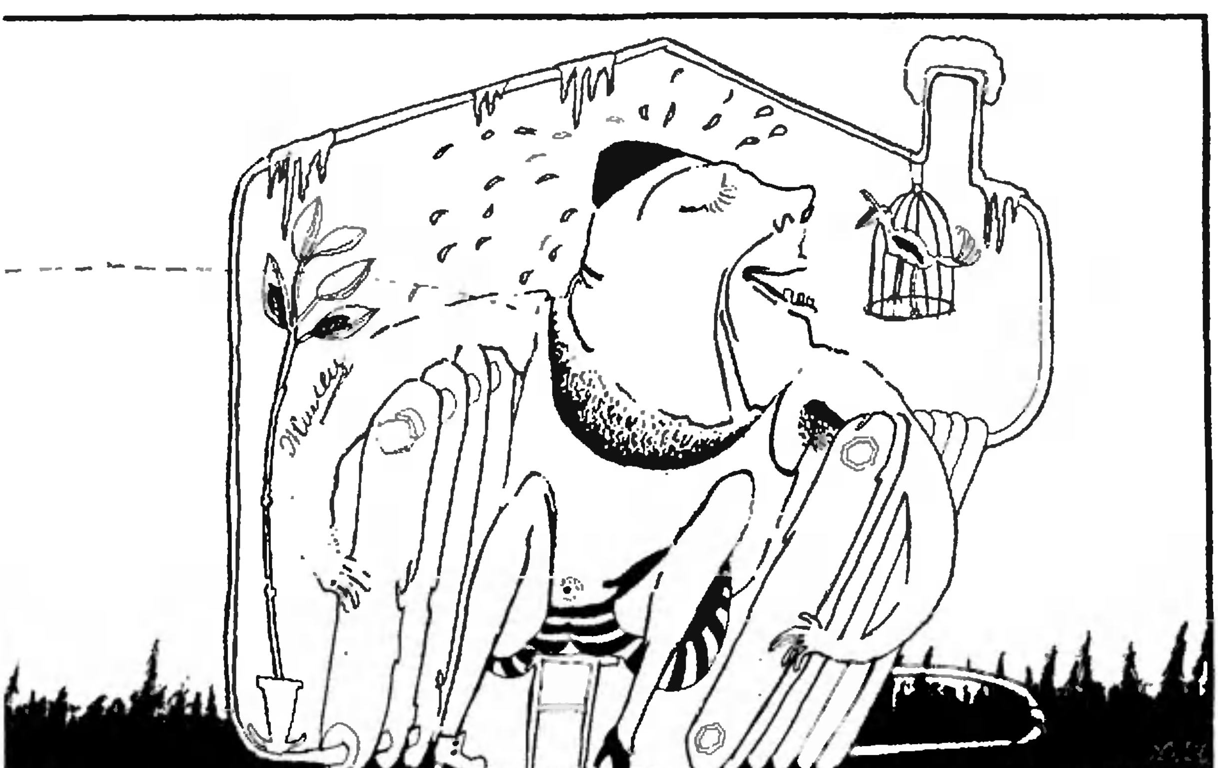
независимо от того, где возникнет «пожар» ядерной войны. Солнечное «отопление» Земли окажется выключенным, и на Земле наступит ледниковый период.

Но вернемся к проблемам отопления жилых помещений.

В уравнениях (1) и (2) фигурирует температура в кельвинах. Абсолютная шкала температур названа шкалой Кельвина в честь английского физика У. Томсона, получившего за большие заслуги в области науки и техники титул лорда Кельвина. Титул был выбран по названию реки, на берегу которой стоит университет Глазго. В этом университете Томсон преподавал физику пятьдесят лет. Примечательно, что в семейном кругу шутливо обсуждались и другие варианты титула — лорд Кабель или лорд Компас. Они отражали две заслуги Томсона: он участвовал в создании первого трансатлантического кабеля из Америки в Англию в 1866 году и внес радикальные усовершенствования в конструкцию компасов для морских судов. Поэтому неудивительно, что, занимаясь разработкой основ термодинамики, Томсон задумался над рациональностью нашей системы отопления. В 1852 году он опубликовал работу, в которой показал, что использование так называемых тепловых насосов в несколько раз выгоднее обычных отопительных устройств. В тепловых насосах, которые работают по принципу холодильной машины, энергия затрачивается на перевод тепла от более холодного наружного воздуха к более теплому воздуху в помещении *).

Идеи Томсона долгие годы не получали развития и практического применения. В 1920 году на первом съезде советских физиков профессор В. А. Михельсон, известный своими работами в области теории теплового излучения, сделал доклад «О динамическом отоплении», в котором в значительной степени развил и дополнил идеи Томсона. Михельсон предложил использовать в тепловых насосах процессы испарения и конденсации рабочего вещества, что и делается в современных конструкциях. За последние десятилетия началось довольно широкое применение тепловых насосов для отопления. В частности, зимой прошлого года в ялтинском пансионате «Дружба» начала работать отопительная теплонасосная установка, где тепло извлекается из морской воды с температурой 8 °С. Так что согреться можно и с помощью холода.

*) См., например, «Квант», 1986, № 11, с. 19.



Задачник „Кванта"

Задачи

М1066 — М1070, Ф1078 — Ф1082

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 87 и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1066» или «Ф1078». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта». новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача М1069 (так же как опубликованные ранее задачи М1046—М1048, М1051, М1052 и М1055) предлагалась весной на Восьмом Турнире городов.

Задачи Ф1078—Ф1082 предлагались на заключительном этапе XXI Всесоюзной олимпиады по физике.

М1066. Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите, что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.

С. Г. Сальников

М1067. Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, выполнено неравенство

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

В. Э. Матизен

М1068. Дан угол AOB (A и B — точки на сторонах угла). Постройте прямую l, проходящую через вершину O так, чтобы площади треугольников AOC и BOD, где C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны.

Р. О. Бурдин

М1069. В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)

Н. Н. Константинов, А. И. Шнирельман

М1070. Тетраэдр пересечен тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным ребрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трех сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.

В. Н. Дубровский

Ф1078. Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку и груз отпускают, и скорость лодки (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи:

5,65; 6,44; 6,96; 7,31; 7,54; 7,70; 7,80; 7,86; 7,91.

Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.

А. А. Шеронов

Ф1079. Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 2), то ванна наполняется за время $t_1=8$ мин; если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то время наполнения увеличится до $t_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $t_3=12$ мин; при тех же условиях, но с душем на конце — $t_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

В. Е. Скороваров

Ф1080. Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещины в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_y=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влаж-

Рис. 1.

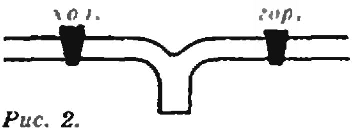


Рис. 2.

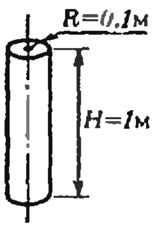


Рис. 3.

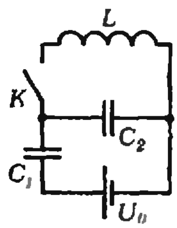


Рис. 4.

ность воздуха $\varphi=80\%$. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.

В. В. Можаев

Ф1081. Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены.

В первом опыте стеклянный цилиндр (рис. 3) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\cdot10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $t_1=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, $1\cdot10^4$ В/м.

Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

А. И. Буздин

Ф1082. В схеме, приведенной на рисунке 4, замыкают ключ K. Найти максимальный ток через катушку. Найти максимальное напряжение на конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

А. Р. Зильберман

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th., 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped

Problems

M1066—M1070, P1078—P1082

M1066. The pairwise distances between six points of the plane are no greater than 1. Prove that there are three points among them whose pairwise distances are strictly less than 1.

S. G. Salnikov

M1067. Prove that any three non-negative numbers x, y, z such that $x^2+y^2+z^2=1$ satisfy the inequality

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

V. E. Matizen

M1068. The angle AOB is given, A and B being points on its sides. Construct a line l passing through the vertex O so as to make the areas of triangles AOC and BOD, where C and D are the bases of the perpendiculars drawn from A and B to the line l, equal.

R. O. Burdin

M1069. In a certain city only pairwise apartment exchanges are allowed (if two families exchange apartments, they cannot participate in other exchanges on the same day). Prove that any multiple exchange involving several families can be carried out in two days. (Before and after each exchange each family lives in a separate apartment.)

N. N. Konstantinov, A. I. Shnirelman

M1070. A tetrahedron is cut by three planes each of which is parallel and equidistant to two opposite edges of the tetrahedron. Prove that the sum of squares of these three section's areas is 4 times less than the sum of squares of the areas of the tetrahedron's faces.

V. N. Dubrovski

Задачник „Кванта"

selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1078. A long thin string with a weight at the end is thrown over a pulley and tied to the front of a model boat which can float along a rectilinear water canal (see figure рис. 1). When the boat and the weight are released, the velocity of the boat (in cm/s) is written down every second. Unfortunately, only the end of this list of figures is available: 5.65, 6.44, 6.96, 7.31, 7.54, 7.70, 7.80, 7.86, 7.91.
Use this data to determine the velocity of the boat 0.1 second after it was released.

A. A. Sheronov

P1079. If the cold water faucet is turned on all the way, while the hot water faucet is turned off (see fiqure рис. 2), the bathtub fills in time $t_1=8$ min; if a rubber pipe with a sprinkling device is slipped on the faucet, the time is $t_2=14$ min. When the cold water faucet is turned off and the hot water one turned on all the way, the bath fills within $t_3=12$ min; under the same conditions, but with a sprinkler, the time is $t_4=18$ min. How long will it take to fill the bath with both faucets open all the way? Under the same conditions but with a sprinkler?

V. E. Skorovarov

P1080. A receptacle with thin walls is used to form vacuum by means of an attached pump, but a constant pressure remains in the receptacle (because of a tiny crack in the walls): $p_y=0.001$ mm Hg. Outside the atmospheric pressure is normal ($p_0=760$ mm Hg), the relative humidity is $\varphi=80$ %. Find the pressure of vapors inside the receptacle. The pressure of saturated vapors at the given temperature is $p_n=17.5$ mm Hg.

V. V. Mojaev

P1081. In order to clear air of dust which settles very slowly under ordinary conditions, we can use the fact that dust particles are charged. In the first experiment a glass cylinder (figure рис. 3) with dusty air is placed in an electric field $E_1=1\cdot 10^4$ V/m directed along the cylinder's axis. In time $t_1=2$ min the entire dust settles on the bottom. In the second experiment, a thin wire is stretched along the cylinder's axis and connected to a high voltage source. It is known that in this case the field will be $E\sim 1/r$, where r is the distance from the axis. The voltage of the source is chosen so as to make the field's value by the cylinder's walls equal to its value in the first experiment, i. e. $1\cdot 10^4$ V/m. Assuming the specks of dust to be identical and equally charged, determine how long it will take for all the dust to settle on the cylinder's walls. There isn't too much dust in the air, so that the volume charge is negligible.

A. I. Buzdin

P1082. On the circuit shown on figure рис. 4, the switch K is turned on. Find the maximal current flowing through the coil. Find the maximal voltage on the capacitor C_1. The elements of the circuit are ideal.

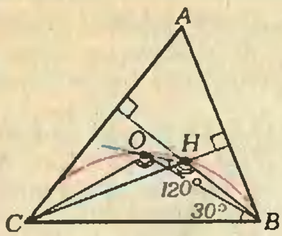
A. R. Zilberman

Решения задач

М1046 — М1050, Ф1058 — Ф1062

М1046. *В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что одна из биссектрис угла, образованного высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности этого треугольника.*

Пусть H — точка пересечения высот, а O — центр описанной окружности треугольника ABC (см. рисунок). Тогда $\angle BOC=120°$, как центральный угол описанной окружности, опирающийся на ту же дугу BC, что и вписанный в нее угол BAC и $\angle BHC=180°-60°=120°$. Следовательно, точки B, H, O и C лежат на одной окружности. Будем для определенности считать, что точка H лежит на дуге BO этой окружности. Тогда $\angle CHO=\angle CBO=(180°-120°)/2=30°$ (треугольник BCO — равнобедренный), т. е. HO — биссектриса того



M1047. *В шахматном турнире, проводимом в один круг, не менее 3/4 всех сыгранных к некоторому моменту партий закончились вничью. Докажите, что в этот момент некоторые два участника набрали одинаковое число очков.*

из углов, образованных высотами BH и CH, который равен $60°$.

Точно так же это утверждение доказывается и для тупоугольного треугольника.

В. Н. Дубровский

В этой задаче удобно пользоваться такой системой подсчета очков: 1 очко за победу, 0 очков за ничью, — 1 очко за поражение (очевидно, она эквивалентна обычной шахматной). Обозначим число участников турнира через n и положим $k=n/2$ при четном n, $k=(n-1)/2$ при нечетном n.

Допустим, что *в данный момент все участники имеют разные результаты.* Тогда среди них найдутся либо k с положительными результатами, либо k с отрицательными результатами. Достаточно рассмотреть только один, скажем, первый случай. Поскольку все эти k шахматистов набрали разное число очков, а число очков каждого не меньше числа выигранных им партий, общее число побед этих шахматистов не меньше $1+2+\ldots+k=k(k+1)/2$. Число всех партий в турнире равно $(n-1)n/2$, поэтому доля партий, закончившихся победой одного из соперников, к рассматриваемому моменту не меньше

$$\frac{k(k+1)}{(n-1)n}>\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

т. е. доля ничьих меньше 3/4, что противоречит условию задачи. Тем самым наше допущение опровергнуто.

М. Бона

M1048.* *Один из двух играющих («начинающий») ставит на некоторую клетку шахматной доски коня. Затем игроки по очереди передвигают коня по обычным правилам (буквой «Г»), при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто может добиться*

О т в е т: а) выигрывает второй игрок, б) выигрывает второй при четном произведении mn и первый (начинающий) — при нечетном.

Рассмотрим сразу общий случай доски $m\times n$. Мы докажем, что если произведение mn четно, то клетки доски можно разбить на пары так, что с одной клетки каждой пары ходом коня можно попасть на другую клетку (рис. 1), а если mn нечетно, то таким же образом можно разбить все клетки доски, кроме одной (рис. 2). В первом случае *победная стратегия второго* игрока заключается в том, что он должен ставить коня на клетку, парную той, на которую перед этим пошел

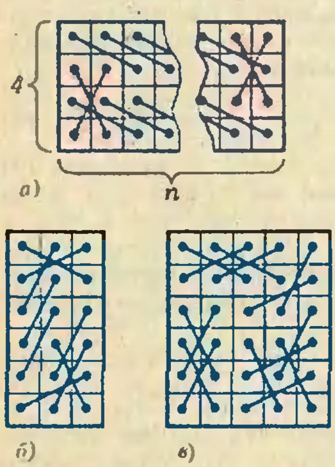


Рис. 1.

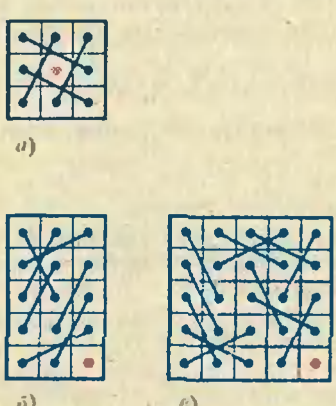


Рис. 2.

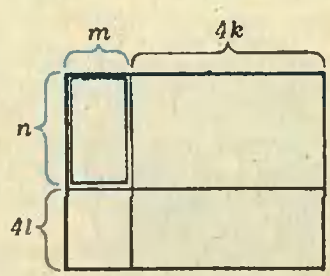


Рис. 3.

победы (независимо от действий противника) — начинающий или его партнер а) на доске 8×8; б) на доске $m\times n$, где $m\geqslant n\geqslant 3$?

первый. При нечетном mn начинающий первым ходом должен ставить коня на клетку, не имеющую пары, а в дальнейшем он сам сможет применить указанную выигрышную стратегию.

Нужное разбиение доски $4\times n$ (или $n\times4$) при любом $n=2, 3, \ldots$ показано на рисунке 1, а). Из рисунка 3 видно, что если один из двух вариантов разбиения имеется для доски $m\times n$, то такой же вариант есть и для досок $(m+4k)\times(n+4l)$ $(k,\ l=1,2,\ldots)$. Таким образом, остается указать разбиения для досок $m\times n$, где m и n дают всевозможные (ненулевые) остатки при делении на 4 и $m\geqslant n\geqslant 3$, т. е. $m, n=3, 5, 6$. Разбиения досок 3×3, 5×3, 5×5, 6×3 и 6×5 приведены на рисунках 2, а), б), в) и 1, б), в) соответственно; доска 6×6 — «удвоенная» 6×3.

В. Зудилин

M1049. *Будем говорить, что в цилиндр $Ц_1$ вписан боком другой цилиндр $Ц_2$, если две образующие второго цилиндра лежат на основаниях первого, а четыре точки окружностей основания второго — на боковой поверхности первого (рис. 1). Взяв цилиндр $Ц_1$, у которого отношение диаметра к высоте равно k, впишем в него боком (если это возможно) цилиндр $Ц_2$, в него впишем боком $Ц_3$, в него — $Ц_4$ и т. д. При каких значениях k*

а) можно вписать $Ц_2$, но нельзя $Ц_3$;

б) можно вписать $Ц_{10}$, но нельзя $Ц_{11}$;*

в) можно вписать бесконечную последовательность $Ц_n$ $(n=1, 2, \ldots)$?*

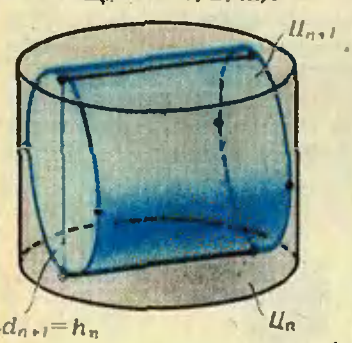


Рис. 1.

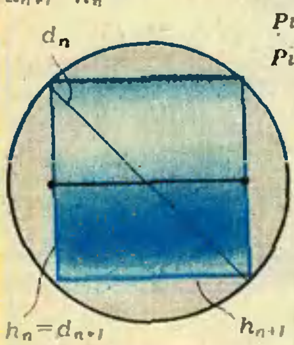


Рис. 2.

Пусть d_n и h_n — диаметр и высота цилиндра $Ц_n$, $a_n=d_n^2/h_n^2$. Из рисунков 1 и 2 видно, что

$$d_{n+1}=h_n,\quad h_{n+1}=d_n^2-h_n^2, \qquad (1)$$

причем вписать $Ц_{n+1}$ в $Ц_n$ можно тогда и только тогда, когда $d_n^2-h_n^2>0$, или $a_n>1$.

а) О т в е т: $k\geqslant\sqrt{2}$. Мы должны найти, при каких k

$$a_1>1,\ a_2\leqslant1.$$

Из формул (1) при $n=1$ получаем соотношение

$$\frac{1}{a_2}=\frac{h_2^2}{d_2^2}=\frac{d_1^2-h_1^2}{h_1^2}=a_1-1; \qquad (2)$$

поэтому $a_2\leqslant1$, когда $a_1\geqslant2$ (при этом автоматически $a_1>1$). Остается заменить a_1 на k^2.

б) О т в е т: $\sqrt{89/55}\leqslant k<\sqrt{34/21}$. Для того, чтобы можно было вписать цилиндры $Ц_2, \ldots, Ц_{10}$ и нельзя — $Ц_{11}$, должны выполняться неравенства $a_1>1$, $a_2>1, \ldots$ $\ldots, a_9>1$, $a_{10}\leqslant1$. Выясним, какое ограничение накладывает каждое из них на $a_1=k^2$. Точно так же, как (2), устанавливается равенство

$$a_{n-1}=1+1/a_n,\ n=2, 3, \ldots.$$

Функция $f(x)=1+1/x$ убывает, поэтому неравенство $a_n>1$ эквивалентно $a_{n-1}<f(1)=2$, это, в свою очередь, эквивалентно $a_{n-2}>f(2)=3/2$, $a_{n-3}<f(3/2)=5/3$ и т. д. Обозначая i-й член последовательности $1, f(1), f(f(1)), f(f(f(1))), \ldots$ через λ_i, получим, что неравенство $a_n>1$ эквивалентно $a_1>\lambda_n$ при нечетном n и $a_1<\lambda_n$ при четном n.

Можно заметить (см. рис. 3), что числа $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \ldots$ возрастают, а $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6, \ldots$ — убывают, причем числа первой последовательности меньше чисел второй последовательности. Это следует из равенств

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n=f(\lambda_n)-f(\lambda_{n-1})=\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_{n-1}}=\frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{\lambda_{n-1}\lambda_n}. \qquad (3)$$

Действительно, если, например, $\lambda_n<\lambda_{n-1}$, то в силу (3) $0<\lambda_{n+1}-\lambda_n<\lambda_{n-1}-\lambda_n$ (так как все λ_i при $i>1$ больше 1), т. е. $\lambda_n<\lambda_{n+1}<\lambda_{n-1}$; аналогично, при $\lambda_n>\lambda_{n-1}$ получим, что $\lambda_n>\lambda_{n+1}>\lambda_{n-1}$. Таким образом, числа λ_n располагаются как на рисунке 4 — каждое из них, начиная с λ_3, лежит между двумя предыдущими, причем $\lambda_1<\lambda_2$.

У нас должны выполняться неравенства $a_1>\lambda_n$ при $n=1, 3, 5, 7, 9$, $a_1<\lambda_n$ при $n=2, 4, 6, 8$ и $a_1\geqslant\lambda_{10}$, т. е. $\lambda_{10}\leqslant a_1<\lambda_8$. Остается подсчитать λ_8 и λ_{10}: $\lambda_8=34/21$, $\lambda_{10}=89/55$. Для упрощения подсчета можно воспользоваться тем, что $\lambda_n=u_n/u_{n-1}$, где u_n — n-й член знаменитой последовательности Фибоначчи

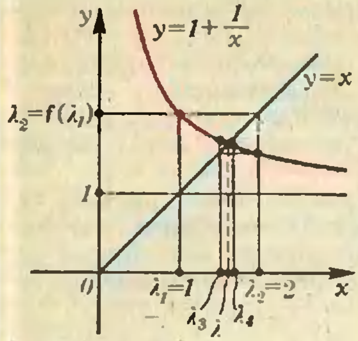


Рис. 3.

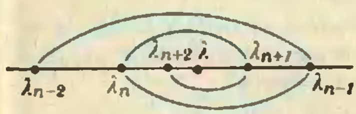


Рис. 4.

1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., определяемой при $n\geqslant 2$ равенством $u_{n+1}=u_{n-1}+u_n$ (в самом деле, $\lambda_2=2/1=u_2/u_1$; $\lambda_{n+1}=1+1/\lambda_n=1+u_{n-1}/u_n=u_{n+1}/u_n$, если $\lambda_n=u_n/u_{n-1}$).

в) Ответ: $k=\sqrt{(1+\sqrt{5})/2}$. Из сказанного в пункте б) вытекает, что искомые значения $k^2=a_1$ должны удовлетворять неравенствам $\lambda_{2m-1}<a_1<\lambda_{2m}$ при всех $m\geqslant 1$. Докажем, что последовательность λ_n при $n\to\infty$ стремится к пределу $\lambda=(1+\sqrt{5})/2$ — положительному корню уравнения $f(\lambda)=\lambda$ (см. рис. 3). Повторяя вывод формулы (3), мы получим, что

$$|\lambda-\lambda_n|=\frac{|\lambda-\lambda_{n-1}|}{\lambda\lambda_{n-1}}<\frac{|\lambda-\lambda_{n-1}|}{\lambda}<\ldots<\frac{|\lambda-\lambda_1|}{\lambda^{n-1}},$$

т. е. $|\lambda-\lambda_n|\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, отрезки $[\lambda_{2m-1};\ \lambda_{2m}]$ стягиваются к точке λ (рис. 4), которая и является единственным возможным значением $a_1=k^2$.*)

В. Столин

М1050. *На отрезке $[-1;\ 1]$ выбрано k различных точек, для каждой посчитано произведение расстояний до остальных $k-1$ точек и через S обозначена сумма обратных величин этих k произведений. Докажите, что а) $S\geqslant 2$ при $k=3$; б)* $S\geqslant 4$ при $k=4$.*

а) Ясно, что каждое из трех произведений лишь увеличится (а сумма S обратных к ним величин уменьшится), если крайние числа раздвинуть: левое заменить на -1, правое — на 1. Поэтому можно считать, что выбраны точки -1, x, 1, где $-1<x<1$. В этом случае

$$S=\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{(1+x)(1-x)}+\frac{1}{2(1-x)}=\frac{2}{1-x^2}\geqslant 2,$$

причем равенство достигается лишь при $x=0$.

б) Аналогично пункту а) задачу для четырех точек можно решать методом «постепенного улучшения». Как и выше, заменяя крайние числа на -1 и 1, мы можем только уменьшить S. Средние точки представим в виде $-1+u$ и $1-v$ ($u>0$, $v>0$, $-1+u<1-v$; рис. 1).

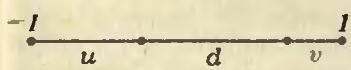


Рис. 1.

Теперь преобразуем сумму S, полагая $d=2-u-v$:

$$S=\frac{1}{2u(u+d)}+\frac{1}{2v(v+d)}+\frac{1}{du(v+d)}+\frac{1}{dv(u+d)}=$$

$$=\frac{d(v(2-u)+u(2-v))+2(2uv+d(u+v))}{2duv(2-u)(2-v)}=$$

$$=\frac{d(2(2-d)-2uv)+2(2uv+d(2-d))}{2duv(4-2(u+v)+uv)}=$$

$$=\frac{2d(2-d)+uv(2-d)}{duv(2d+uv)}=\frac{2-d}{duv}.$$

Произведение uv при заданной сумме $u+v=2-d$ максимально, когда $u=v=(2-d)/2$, поэтому

$$S\geqslant\frac{4}{d(2-d)}\geqslant 4,$$

причем равенство достигается здесь при $d=1$, $u=v=1/2$, т. е. для точек -1, $-1/2$, $1/2$, 1.

Оказывается, при каждом $k\geqslant 3$ наименьшее значение S равно 2^{k-2} и достигается для набора $x_n=-\cos\frac{n\pi}{k-1}$, $n=0, 1, \ldots, k-1$. Укажем красивое рассуждение, которое (в отличие от прямых вычислений, приведенных выше) годится для общего случая.

Пользуясь тождеством $\cos(m+1)\varphi=2(\cos m\varphi)\cos\varphi-\cos(m-1)\varphi$, легко доказать, что при любом $m\geqslant 1$ существует многочлен $T_m(x)$ такой, что $T_m(\cos\varphi)=\cos m\varphi$, причем его старший коэффициент равен 2^{m-1}.

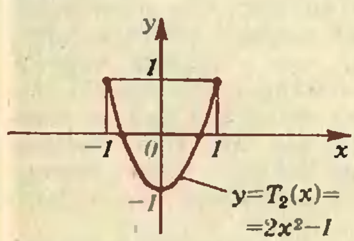


Рис. 2.

*) Близкие задачи об итерациях функций рассмотрены в книге «Заочные математические олимпиады» (М.: «Наука», 1987; задачи 6-16, 6-17).

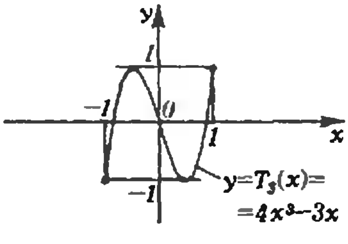


Рис. 3.

Например, $T_2(x)=2x^2-1$ (рис. 2), $T_3(x)=4x^3-3x$ (рис. 3). Отметим, что $|T_m(x)|\leqslant 1$ при $|x|\leqslant 1$. Многочлен $T_m(x)$ называется *многочленом Чебышёва* (см. статью Н. Васильева и А. Зелевинского «Многочлены Чебышёва и рекуррентные соотношения» в «Кванте» № 1 за 1982 г.). С его помощью мы решим задачу для $k=m+1$ точек.

Пусть x_n, $n=0, \ldots, k-1$, — любой набор k различных точек на отрезке $[-1; 1]$. Всякий многочлен степени $k-1$ однозначно определяется своими значениями a_n в точках $x=x_n$ и, как нетрудно проверить, может быть записан в виде суммы

$$\sum_{n=0}^{k-1} a_n \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_{n+1})\ldots(x-x_{k-1})}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})}.$$

Возьмем $a_n=T_{k-1}(x_n)$, тогда этот многочлен будет тождественно равен $T_{k-1}(x)$. Его старший коэффициент, равный 2^{k-2}, является суммой выражений

$$\frac{a_n}{(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n+1})\ldots(x_n-x_{k-1})},$$

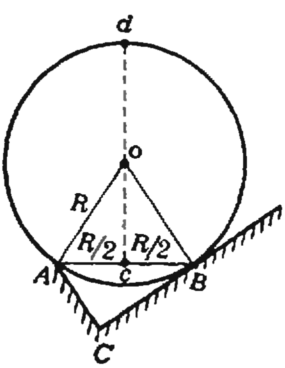
каждое из которых по модулю не превосходит

$$\frac{1}{|x_n-x_0|\ldots|x_n-x_{n-1}|\,|x_n-x_{n+1}|\ldots|x_n-x_{k-1}|} \qquad (*)$$

(поскольку $|a_n|=|T_{k-1}(x_n)|\leqslant 1$). Но сумма величин $(*)$ при $n=0, \ldots, k-1$ как раз и есть интересующая нас сумма S; следовательно, $S\geqslant 2^{k-2}$.

Л. Д. Курляндчик

Ф1058. *Шарик катится вдоль ребра прямоугольного желоба ACB (см. рис.) со скоростью v без проскальзывания; расстояние AB равно радиусу шарика. Какие точки шарика обладают максимальной скоростью? Чему равна эта скорость?*



По условию задачи шарик катится без проскальзывания, поэтому скорости тех точек шарика, которые в данный момент времени касаются желоба в точках A и B (см. рисунок), равны нулю. Считая шарик абсолютно твердым телом (а это означает, что расстояние между любыми двумя точками шарика остается неизменным), приходим к выводу, что в данный момент времени все точки шарика, лежащие на отрезке AB, неподвижны. А это означает, что в каждый момент времени движение шарика — это вращение относительно оси AB. (Ясно, что точки A и B — точки, в которых шарик касается желоба, — перемещаются со скоростью v.)

Мгновенная скорость любой точки шарика есть $\omega\rho$, где ω — угловая скорость вращения, ρ — расстояние от точки до оси AB. Скорость центра шарика (т. o на рисунке) равна v; расстояние от т. o до оси AB — $\rho_0=|oc|=R\sqrt{3}/2$. Следовательно,

$$\omega=\frac{v}{\rho_0}=\frac{2v}{R\sqrt{3}}.$$

Понятно, что максимальной скоростью обладают точки шарика, наиболее удаленные от оси AB. Из геометрических соображений ясно, что в любой момент имеется лишь одна точка, максимально удаленная от оси, — на рисунке это точка d. Расстояние от т. d до оси вращения равно $\rho_d=\rho_0+R=R(1+\sqrt{3}/2)$, и скорость точки d —

$$v_d=v_{\max}=\omega\rho_d=\frac{2v}{R\sqrt{3}}R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=v\,\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

С. С. Кротов

Ф1059. *В некоторой точке пространства необходимо создать максимально возможную напряженность гравитационного поля (ускорение свободного падения), имея в распоряжении заданную массу вещества неизменной плотности.*

а) Какую форму необходимо придать телу из этого вещества?

б) Каково должно быть взаимное расположение тела и точки?

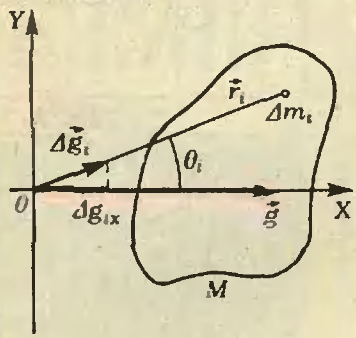


Рис. 1.

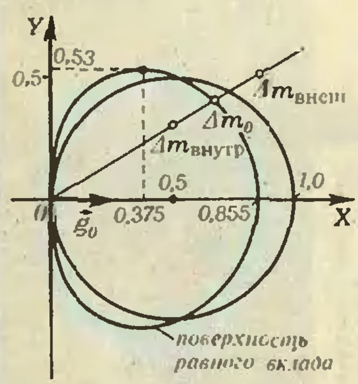


Рис. 2.

Пусть однородное тело массой M создает гравитационное поле, вектор напряженности которого в некоторой точке O равен $\vec{g}$ и направлен вдоль оси OX, как это показано на рисунке 1. Согласно принципу суперпозиции полей вектор $\vec{g}$ является суммой векторов $\Delta\vec{g}_i$ напряженностей полей, созданных в точке O всеми бесконечно малыми элементами Δm_i тела M. Вклад каждого элемента в общее поле $\vec{g}$ равен проекции вектора $\Delta\vec{g}_i$ на ось OX, т. е. равен

$$\Delta g_{ix}=\frac{G\cdot\Delta m_i}{r_i^2}\cos\theta_i\,,$$

где r_i — расстояние от точки O до элемента Δm_i, θ_i — угол между направлением на элемент и осью OX. Следовательно (если все элементы Δm_i одинаковы),

$$g=|\vec{g}|=\sum_i \Delta g_{ix}=G\Delta m\sum\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}\,.$$

Таким образом, при данной массе тела M значение g будет максимальным, если форма тела и его ориентация относительно точки O будут такими, что величина $\sum\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}$ будет максимальной.

Рассмотрим тело массой M, ограниченное проходящей через точку O поверхностью, для всех точек которой (кроме точки O) отношение $\frac{\cos\theta_i}{r_i^2}$ одно и то же, т. е.

$$\frac{\cos\theta}{r^2}=\mathrm{const}.$$

Такую поверхность назовем поверхностью равного вклада. Тело, ограниченное поверхностью равного вклада, является телом вращения (вокруг оси OX; см. рис. 2). Покажем, что именно такое тело создает гравитационное поле, напряженность которого g_0 максимальна в точке O.

Элементы Δm, находящиеся на поверхности равного вклада, по определению вносят одинаковые вклады Δg_{0x} в g_0. Вклад любого внутреннего элемента $\Delta g_{внутр}$ больше Δg_{0x}; если бы элемент Δm оказался за поверхностью тела, то его вклад $\Delta g_{внеш}$ в величину g_0 был бы меньше Δg_{0x}. Таким образом,

$$\Delta g_{внутр}>\Delta g_{0x}>\Delta g_{внеш}. \qquad (*)$$

Любая деформация тела M (без изменения его плотности), *не приводящая к изменению направления вектора* напряженности в точке O, сводится к переносу массы из внутренних областей во внешние области, за пределы поверхности равного вклада. Как видно из соотношения (*), это приводит к уменьшению напряженности поля в точке O.

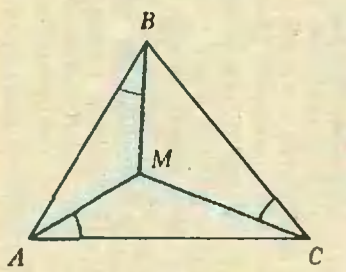
Следовательно, напряженность гравитационного поля, создаваемого в точке O телом данной массы, максимальна, если это тело — тело вращения, ограниченное поверхностью равного вклада, и точка O лежит на поверхности на оси вращения.

Заметим, что отличие формы этого тела от шарообразной существенно. На рисунке 2 представлены сечения такого тела и шара такой же массы. Видно, как нужно деформировать шар, чтобы получить в одной точке (в данном случае в точке O) максимально возможное поле. Оказывается, что после такой деформации шара напряженность поля в точке O возрастет в $\sqrt[3]{27/25}$ раза, т. е. примерно на 3 %.

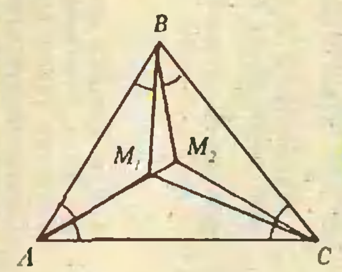
Е. П. Юносов, И. В. Яминский

(Окончание см. на с. 34)

Замечательные точки и линии

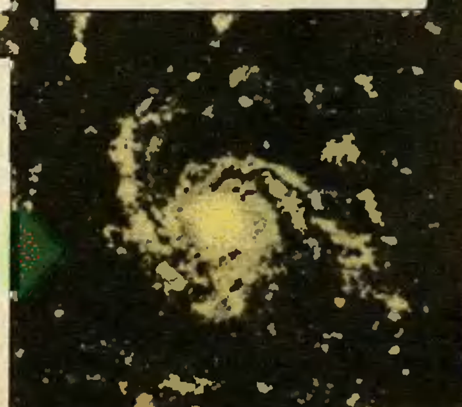


В треугольнике существует такая точка, что отрезки, соединяющие ее с вершинами, образуют одинаковые углы со сторонами. Эта точка называется *точкой Брокара* в честь французского математика Анри Брокара (1845—1922), автора наиболее полного справочника по замечательным кривым.

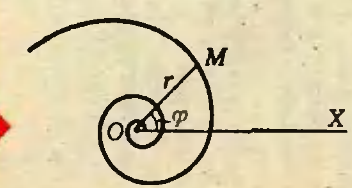


Эти одинаковые углы называются *углами Брокара*. Существует и вторая точка Брокара в треугольнике, которая получится при противоположном обходе вершин треугольника. Интересно, что величина угла Брокара для второй точки будет такой же, как и для первой.

Логарифмическую спираль можно увидеть и в звездном атласе. Дело в том, что многие галактики состоят из семейств логарифмических спиралей. Они так и называются: *спиральные галактики*.



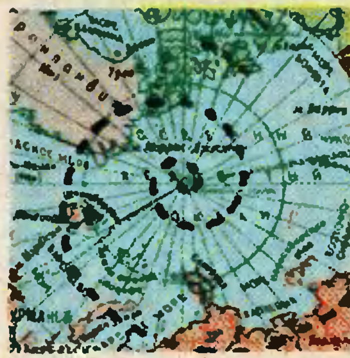
В справочнике Брокара мы находим *логарифмическую спираль*. Ее уравнение $r=ae^{k\varphi}$, где r — расстояние точки M на спирали до выбранной точки O, φ — угол между лучом OM и выбранным лучом OX. Если логарифмическую спираль подобно увеличивать и одновременно поворачивать, она будет переходить в себя.



Логарифмическая спираль часто встречается в живой и неживой природе. Например, форму логарифмической спирали имеют многие раковины.

Логарифмическая спираль проявляется в природе не только в ракушках и галактиках. Например, если вы внимательно посмотрите на этот цветок, то вам, возможно, удастся заметить, что семена в нем также расположены по логарифмическим спиралям.

Тангенс угла Брокара выражается формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$, где S — площадь треугольника, а a, b, c — длины его сторон. Площади треугольников, на которые разбивается исходный треугольник, относятся, как обратные величины квадратов сторон: $a^2S_{ABM} = b^2S_{BCM} = c^2S_{CAM}$.



Логарифмическая спираль образует одинаковые углы в пересечении с лучами, исходящими из точки O. Поэтому, если мы начнем вблизи Северного полюса идти, скажем, на юго-восток, то мы будем обходить его по логарифмической спирали.

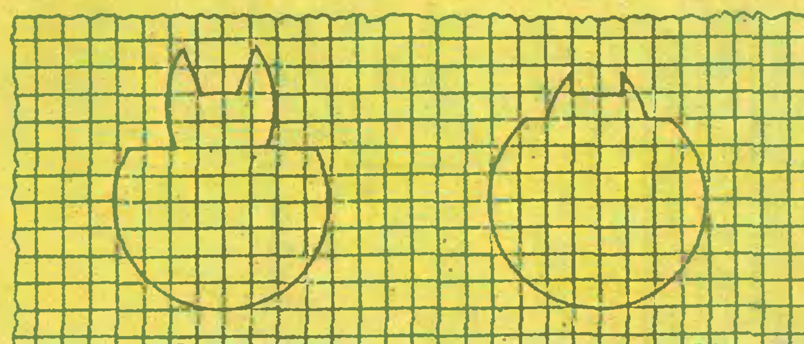
Головоломки

1. Три одинаковых треугольника разрезаны по разным медианам. Сложите из полученных шести кусков один треугольник.

В. В. Произволов

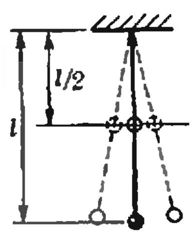
2. Разрежьте фигурку, изображенную на левом рисунке, на две части так, чтобы из них можно было бы сложить круг. Сделайте то же самое для фигурки на правом рисунке. (П о д с к а з к а: *при разрезании первой фигурки вы* увидите мордочку хитрой лисы, а при разрезании второй — голову неуклюжего медведя.)

А. М. Домашенко



1987 10

Ф1060. *Математический маятник представляет собой невесомый стержень длиной l, к свободному концу которого прикреплен маленький массивный грузик. На стержень надета бусинка такой же массы, которая может свободно скользить по горизонтальной направляющей, проходящей на уровне середины стержня (см. рисунок). Найти период малых колебаний такого маятника. Трение отсутствует.*



Предположим, что математический маятник длиной l отклонили на угол α_0 и отпустили. Согласно закону сохранения энергии максимальное значение скорости маятника (грузика) равно

$$v_m=\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}=2\sin\frac{\alpha_0}{2}\sqrt{gl}.$$

При условии малости колебаний

$$\sin\frac{\alpha_0}{2}\approx\frac{\alpha_0}{2}\approx\frac{A}{2l},$$

где A — амплитуда колебаний маятника, и

$$v_m=A\sqrt{\frac{g}{l}}=A\omega_0,$$

где ω_0 — частота колебаний.

Найдем максимальную скорость грузика для нашей системы (маятник с бусинкой, находящейся все время на одной и той же горизонтали). Запишем закон сохранения энергии для системы в тот момент, когда грузик проходит наинизшую точку траектории:

$$\frac{m}{2}v_m^2+\frac{m}{2}\left(\frac{v_m}{2}\right)^2=mgl\,(1-\cos\alpha_0)$$

($\frac{v_m}{2}$ — скорость бусинки в этот момент). Отсюда

$$v_m=\frac{2}{\sqrt5}\sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha_0)}=A\cdot\frac{2}{\sqrt5}\,\omega_0.$$

Как видно из этого результата, частота ω колебаний нашей системы в $2/\sqrt5$ раз меньше частоты ω_0 колебаний математического маятника длиной l. Следовательно, период колебаний системы —

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\omega_0\sqrt5=\pi\sqrt{\frac{5l}{g}}.$$

Л. Г. Маркович

Ф1061. *Пламя спиртовки, перед тем как погаснуть, начинает мерцать и потрескивать. Почему?*

Причиной мерцания пламени является, очевидно, неравномерность поступления горючего — спирта. Это имеет место, когда спирт кончается.

Действительно, когда спирта остается мало, начинают сказываться, помимо капиллярных сил «захвата» горючего фитилем, силы взаимодействия спирта с дном и стенками спиртовки (силы поверхностного натяжения). Перебои в поступлении горючего могут возникнуть и из-за наличия всякого рода «грязи», находящейся, как правило, на дне спиртовки.

Итак, в некоторый момент времени спирта, поступающего к пламени по фитилю, не хватает для поддержания устойчивого размера пламени, и пламя как бы пропадает; однако в следующий момент поступает «избыток» спирта, и происходит резкое увеличение пламени, сопровождающееся треском.

Как правило, при диаметре фитиля 2—3 мм такие мерцания с потрескиванием возникают, когда длина фитиля составляет несколько миллиметров, причем, чем короче фитиль — тем чаще происходят вспышки, сопровождающиеся треском.

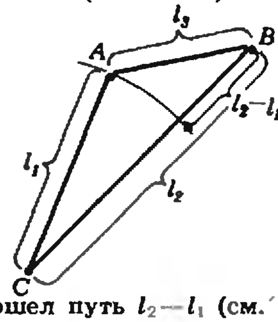
А. С. Бутов

Ф1062. *Космическая частица, движущаяся со скоростью, близкой к скорости света, попадает в ре-*

Наличие двух светящихся точек означает, что скорость u, с которой частица движется в резервуаре, больше скорости света в жидкости, т. е. больше $v=c/n$ (c — скорость света в вакууме).

зервуар экспериментальной установки, наполненной жидкостью с показателем преломления $n=1{,}6$. Прохождение частицы через жидкость сопровождается свечением. Через небольшой промежуток времени после попадания частицы в резервуар был включен прибор, находящийся в точке C, который зафиксировал в момент включения две светящиеся точки A и B (схема опыта в определенном масштабе приведена на рисунке; дан вид сверху, точки C, A и B лежат в горизонтальной плоскости). Объясните наблюдавшееся явление и, используя рисунок, найдите скорость частицы. Торможением частицы в жидкости пренебречь.

Действительно, в момент включения прибора к прибору пришел свет, испущенный до этого в разные моменты времени из точек A и B. На прохождение пути BC свету потребовалось время t_1 большее, чем время t_2 на прохождение пути AC. Следовательно, в точке B частица была раньше, чем в точке A, т. е. частица движется справа налево (от B к A). За время t_2-t_1 свет



в жидкости прошел путь l_2-l_1 (см. рисунок), а частица — путь l_3. Как видно из рисунка, $l_3>l_2-l_1$. Значит, действительно $u>v$.

Значение u найдем из уравнения

$$\frac{l_2-l_1}{v}=\frac{l_3}{u} \Rightarrow u=v\frac{l_3}{l_2-l_1}=\frac{c}{n}\frac{l_3}{l_2-l_1}.$$

Определив из чертежа отношение $l_3:(l_2-l_1)$, получим

$$u=0{,}83\ c.$$

А. И. Буздин

Наша анкета

Дорогие читатели! Для того чтобы при подготовке материалов к публикации в «Кванте» редакция могла учесть ваши интересы, уровень подготовки и вкусы, просим вас ответить на вопросы нашей традиционной анкеты.

Для сокращения сроков обработки анкет ответы просим высылать на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 10 января 1988 года.

Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». На конверте сделайте пометку «Анкета-87».

---

1. Фамилия, имя (не обязательно). Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность).

2. Круг интересов (математика, физика). С какого года вы выписываете наш журнал? Сколько человек читают ваши экземпляры «Кванта»?

3. Наиболее и наименее интересные статьи по математике из числа опубликованных в 1987 году.

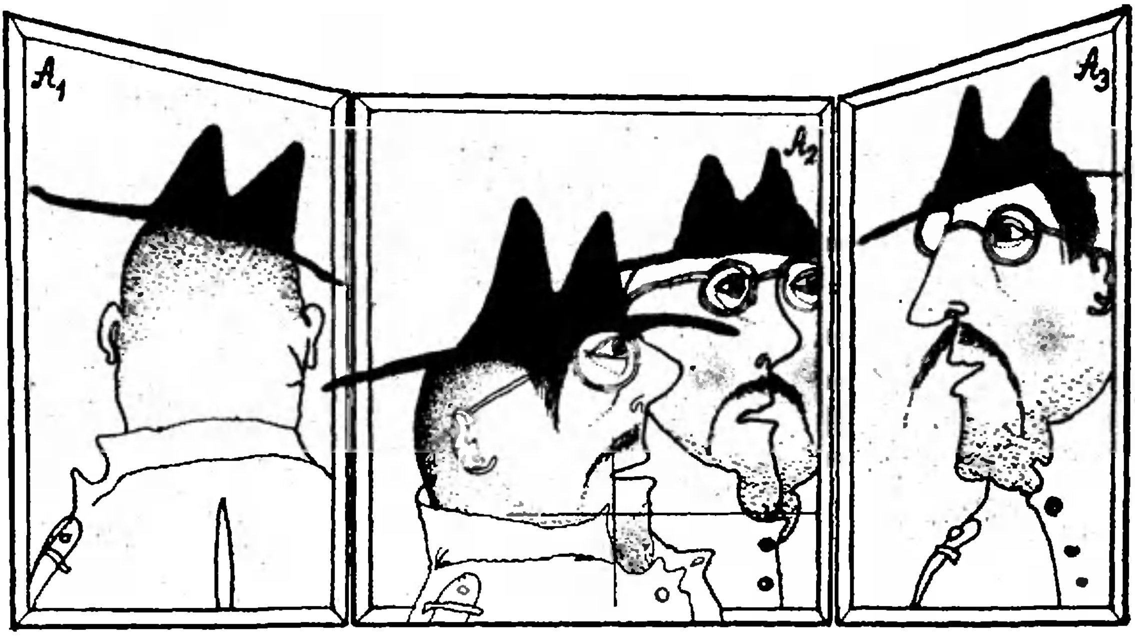
4. Наиболее и наименее интересные статьи по физике из числа опубликованных в 1987 году.

5. Самая удачная и самая неудачная обложка журнала в 1987 году.

6. Какие разделы журнала вам нравятся, а какие — нет? Какие новые разделы следовало бы ввести?

7. Какие материалы, опубликованные в «Кванте» в 1987 году, помогли в вашей учебе или работе, что вы искали в «Кванте», но не нашли?

8. О чем бы вы хотели прочитать на страницах нашего журнала в 1988 году?



Школа в „Кванте"

Основные теоремы

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Наша цель — рассказать о трех основных теоремах трех великих А: Арифметики, Алгебры, Анализа. Эти теоремы должен знать каждый, кто хоть немного интересуется математикой. Первая — о разложении чисел на простые множители, вторая — о разложении многочленов на неприводимые многочлены, третья — о вычислении площади.

Мы начнем с основной теоремы алгебры: о ней писал Рене Декарт в 1637 году — ровно 350 лет тому назад — в своей книге «Геометрия». В этой книге есть глава, посвященная уравнениям; она начинается такими словами:

«Знайте, что всякое уравнение может иметь столько же корней, какова степень уравнения; ибо если перемножить два уравнения $x-2=0$ и $x-3=0$, то получится уравнение второй степени: $x^2-5x+6=0$, которое имеет корни 2 и 3. Если это уравнение, в свою очередь, умножить на $x-4=0$, то получится уравнение третьей степени $x^3-9x^2+26x-24=0$ с тремя корнями 2, 3 и 4».

В курсе алгебры 8 класса доказывается, что многочлен второй степени x^2+px+q, имеющий корни x_1 и x_2, представляется в виде произведения многочленов первой степени:

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2).$$

Примеры разложения квадратного трехчлена в произведение:

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2);$$
$$x^2-2x+1=(x-1)^2;$$
$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2});$$
$$x^2+x-1=(x+1/2-\sqrt{5}/2)(x+1/2+\sqrt{5}/2).$$

Однако случается, что квадратный трехчлен не имеет корней и его разложить в такое произведение нельзя. Что же касается многочленов более высокой степени, то для них имеет место такая теорема:

Любой многочлен вида $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$ можно разложить в произведение многочленов вида $x-a$ и многочленов второй степени вида x^2+px+q, не имеющих корней; причем это разложение единственно: два такие разложения отличаются только порядком сомножителей.

Примеры разложения многочленов на множители:

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ — 1 корень;

$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$ — 3 корня;

$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ — 1 корень;

$x^4-1=(x^2+1)(x-1)(x+1)$ — 2 корня;

$x^4+1=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$ — 0 корней.

Из этой теоремы следует, что многочлен n-й степени может иметь, самое большее, n корней; ровно n корней будет, если он раскладывается в произведение n различных множителей вида $x-a$. Многочлен может иметь и меньше корней за счет того, что некоторые такие множители повторяются (при этом возникают кратные корни), и за счет того, что некоторые множители — квадратные трехчлены, не имеющие корней.

Значительно более изящную форму примет эта теорема, если ввести в употребление *комплексные числа*, т. е. выражения вида $a-b\sqrt{-1}$, где $(a;\ b)$ — пара действительных чисел. Тогда уже любой квадратный трехчлен (с действительными или комплексными коэффициентами) имеет два комплексных корня и раскладывается на множители первой степени.

Примеры разложения квадратных трехчленов с комплексными корнями:

$$x^2+1=(x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1});$$
$$x^4-4x+3=(x-1)^2(x+1-\sqrt{-2})\times$$
$$\times(x+1+\sqrt{-2}).$$

Благодаря этому сформулированная ранее теорема принимает следующий вид:

Всякий многочлен вида $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0$ *(где* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ *— комплексные числа) представляется в виде произведения* n *сомножителей* $(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$, *где* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *— комплексные числа, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей.*

Это и есть *основная теорема алгебры*.

* * *

Основная теорема арифметики сродни основной теореме алгебры:

Всякое целое положительное число, большее единицы, может быть представлено в виде произведения простых чисел. Причем два таких разложения могут отличаться только порядком сомножителей.

Примеры разложения целых чисел на простые множители:

$400=2^4\cdot5^2$;	$1001=7\cdot11\cdot13$;
$290\,981=43\cdot67\cdot101$;	$1987=1987$.

Этой теоремой мы фактически пользуемся, начиная с младших классов — и при сокращении дробей, и при приведении их к наименьшему общему знаменателю.

Чаще всего мы пользуемся следующим утверждением, которое, как легко понять, равносильно основной теореме арифметики: *если произведение целых чисел делится на некоторое простое число, то на это простое число делится хотя бы один из сомножителей.*

Итак, обе основные теоремы — арифметики и алгебры — касаются вопроса разложения в произведение неразложимых. Целые числа разлагаются в произведение простых чисел, а многочлены — в произведение, как говорят, *неприводимых* многочленов. Обе теоремы утверждают, что такое разложение единственно.

Строгое доказательство основной теоремы алгебры дал в 1799 году великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855); он же в 1801 году сформулировал и доказал основную теорему арифметики *).

Утверждение основной теоремы арифметики совершенно ясно и было известно с древнейших времен, но именно Гаусс понял, насколько важно утверждение о единственности разложения на простые множители. Оказывается, возможны такие числовые системы, в которых аналог основной теоремы арифметики перестает быть верным. Не останавливаясь на этом подробно, мы только приведем наиболее известный пример — систему чисел вида $a+b\sqrt{-5}$, где $(a;\ b)$ — пара целых чисел (которые складываются и умножаются по тем же правилам, что и комплексные). В этой системе, например, $21=3\cdot7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})$. Мы не станем обсуждать здесь, почему числа 3, 7, $4+\sqrt{-5}$, $4-\sqrt{-5}$ являются простыми в этой числовой системе. Интересующийся читатель может найти ответ в замечательной книге Г. Радемахера и О. Теплица «Числа и фигуры» — М.: «Физматгиз», 1962.

Однако не нужно думать, что в любых числовых системах вида $a+b\sqrt{d}$

---

*) Доказательство основной теоремы арифметики см., например, в «Кванте», 1987, № 4, с. 12; доказательство основной теоремы алгебры — в «Кванте», 1980, № 2, с. 17; 1982, № 4, с. 3.

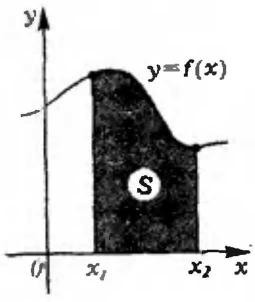


Рис. 1.

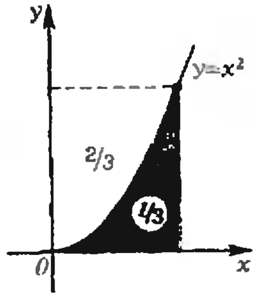


Рис. 2.

(a, b — целые числа, d — фиксированное целое число) нет однозначного разложения на простые множители. Важный пример «хорошей» числовой системы — так называемые *гауссовы числа*, т. е. числа вида $a+b\sqrt{-1}$, где a и b — целые. Для них аналог основной теоремы арифметики имеет место.

Формулируя этот аналог, нужно учитывать наличие так называемых обратимых чисел. Число (гауссово или обыкновенное) называется *обратимым*, если существует другое (возможно, то же самое) число, такое, что произведение двух этих чисел равно 1. Среди целых чисел обратимы числа 1 и -1, среди многочленов обратимыми являются многочлены «нулевой степени» — числа, отличные от нуля, среди гауссовых чисел — числа 1, -1, $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. В разложении $q=p_1...p_n$ на простые множители можно умножить, скажем, p_1 и p_2 на числа, произведение которых равно 1, и получится другое разложение. Это вынуждает нас не различать также разложения, получающиеся друг из друга умножением сомножителей на обратимые числа. При этом и q, и p_1, ..., p_n нужно считать необратимыми. В формулировке основной теоремы арифметики мы избежали этих оговорок, предположив, что все числа больше 1; в формулировке основной теоремы алгебры — предположив, что старшие коэффициенты многочленов равны 1.

* * *

В то время, как основные теоремы алгебры и арифметики родственны, как мы видели, друг другу, основная теорема анализа отстоит от них достаточно далеко. Это — входящая в школьный курс математики 10 класса *теорема Ньютона—Лейбница*.

Эта теорема замечательна тем, что она позволяет находить площади криволинейных фигур. Она производит огромное впечатление еще и потому, что связывает воедино две, казалось бы, совсем разные геометрические задачи: задачу проведения касательных (производные) и задачу нахождения площадей (интегралы). То, что эти задачи должны быть взаимно обратны, первым заметил учитель Ньютона английский математик Исаак Барроу. Но в виде формулы эта связь впервые

Примеры производной $f'(x)$ и первообразной $F(x)$ функции $f(x)$:

Функция	x	x^2	$ax+b$
Производная	1	$2x$	a
Первообразная	$x^2/2+c$	$x^3/3+c$	$ax^2/2+bx+c$

была получена Ньютоном и, независимо от него, Лейбницем.

Теорема Ньютона—Лейбница утверждает, в частности, что если непрерывная положительная функция f, заданная на отрезке $[a;\ b]$, является производной функции F, заданной на том же отрезке, (или, как говорят, функция F является *первообразной* функции f), то площадь S под ее графиком находится по формуле

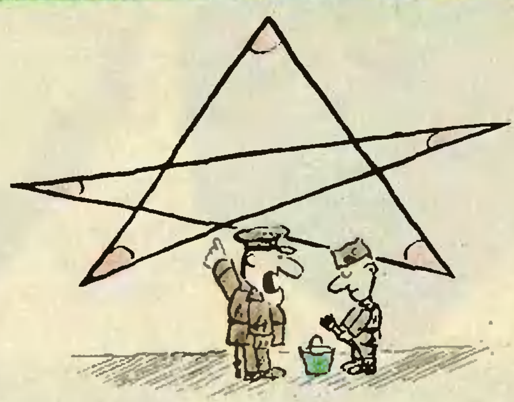
$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \text{ (см. рис. 1).}$$

Например, площадь «параболической подставки» (рис. 2) может быть найдена по этой формуле: функция $f(x)=x^2$ является производной функции $F(x)=x^3/3$ и, значит, интересующая нас площадь равна

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Эту площадь впервые вычислил Архимед, ничего не знавший, конечно, о формуле Ньютона—Лейбница. (Интересно, что Архимед решал эту задачу в разных контекстах по крайней мере три раза, не подозревая, что он решает одну и ту же задачу.)

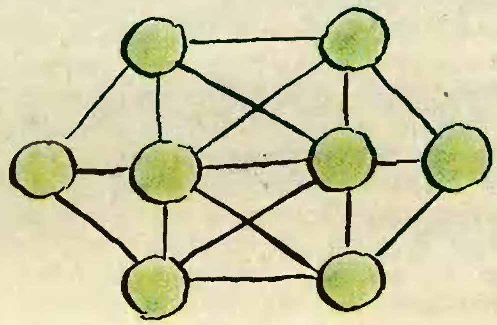
Задача отыскания первообразной для заданной функции оказалась важной аналитической задачей. Для рациональных функций она связана с основной теоремой алгебры: первообразную дробно-рациональной функции всегда можно выразить через элементарные функции (включая логарифм и арктангенс), но для этого нужно знать разложение знаменателя на линейные и квадратичные множители.



Задачи

1. Нетрудно показать, что у правильной пятиконечной звезды сумма углов равна 180°. Докажите, что такая же сумма углов будет у произвольной пятиконечной звезды.

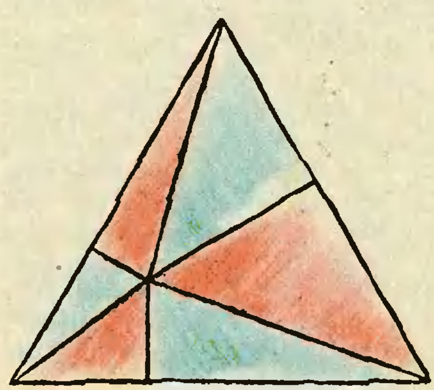
2. Мне удалось, взяв по два раза цифры 1, 2, 3 и 4, написать восьмизначное число, у которого между единицами стоит одна цифра, между двойками — две, между тройками — три и между четверками — четыре цифры. Какое это число?



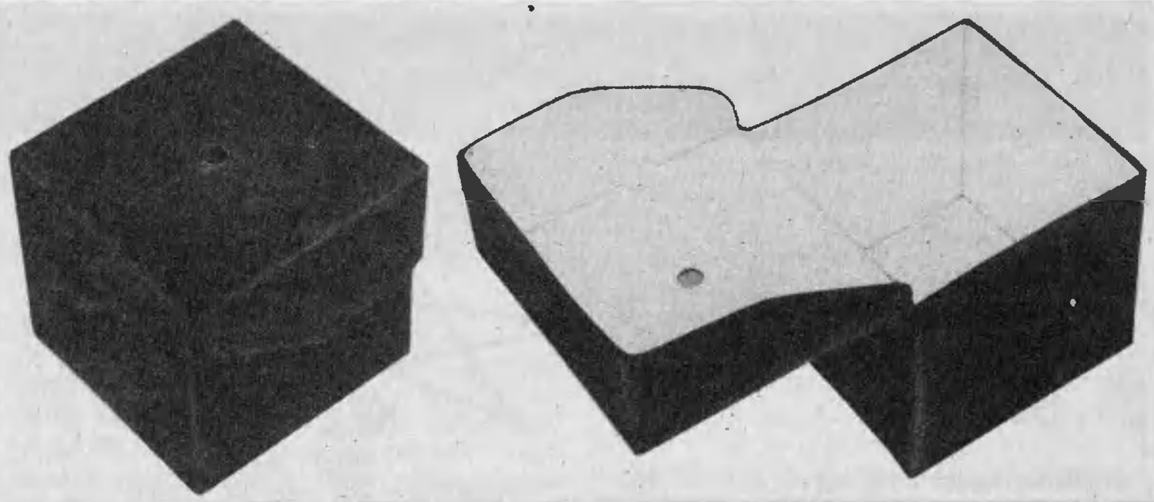
3. Расставьте числа от 1 до 8 в кружках фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы числа в кружках, соединенных отрезками, отличались не меньше, чем на два.

4. Мои настенные часы ведут себя очень странно. В первой половине каждого часа они спешат на 2 минуты, зато во второй его половине на две минуты отстают. В чем причина такого поведения часов?

5. Точка, взятая внутри равностороннего треугольника, соединена со всеми вершинами. Кроме того, из нее опущены перпендикуляры на все стороны треугольника. Покажите, что сумма площадей красных треугольников (см. рисунок) равна сумме площадей синих треугольников.



Эти задачи нам предложили ученик 9 класса школы № 8 г. Мозыря *Александр Коршков*. *А. П. Савин*, *А. М. Домашенко*, *А. А. Панов*, *В. В. Произволов*.



Лаборатория „Кванта"

Может ли белое быть чернее черного?

В. В. МАЙЕР

Начнем с совсем простого наблюдения.

Положите рядом листки белой и черной бумаги и создайте в комнате полную темноту. Тогда ни одного листка вы не увидите, т. е. оба они будут одинаково черными.

Казалось бы, ни при каких условиях белая бумага не может быть чернее черной. И все же это не так. Попробуйте придумать и поставить опыт, в котором белое оказывается более черным, чем черное. Но прежде прочитайте следующий абзац.

Тело, которое при любой температуре полностью поглощает падающее на него излучение любой частоты, называется абсолютно черным.*) Понятно, что это — идеализация, в природе абсолютно черных тел нет. Тела, которые мы обычно называем черными (сажа, копоть, черные бархат и бумага и т. д.), на самом деле серые, т. е. они частично поглощают, а частично рассеивают падающий на них свет. Следовательно, для решения поставленной задачи можно, например, из белой бумаги сделать тело, более близкое к абсолютно черному, чем черная бумага. Теперь искомое решение почти очевидно.

Оказывается, вполне хорошей моделью абсолютно черного тела может служить сферическая полость с небольшим отверстием. Если диаметр отверстия не превышает 1/10 диаметра полости, то (как показывает соответствующий расчет) вошедший в отверстие световой пучок сможет выйти из него обратно лишь после многократных рассеяний или отражений от разных точек стенки полости. Но при каждом «соприкосновении» пучка со стенкой энергия света частично поглощается, так что доля выходящего обратно из отверстия излучения ничтожно мала. Поэтому можно полагать, что отверстие полости практически полностью поглощает свет любой длины волны, как и абсолютно черное тело.

Конкретный прибор для опыта можно сделать, например, так. Из картона склейте коробку размером примерно $100\times100\times100$ мм с открывающейся крышкой. Изнутри коробку оклейте белой бумагой, а снаружи — покрасьте черной тушью, гуашью или, что еще лучше, оклейте черной бумагой от фотопакетов. В крышке проделайте отверстие диаметром не более 10 мм. Фотографию такого прибора вы видите на заставке.

Показывая опыт, осветите крышку

*) Несколько подробнее об этом можно прочитать в заметке «Абсолютно черное тело» («Квант», 1985, № 2, с. 26).

коробки настольной лампой. Тогда отверстие будет выглядеть более черным, чем черная крышка. Откройте крышку, и все увидят, что за отверстием — белая бумага, которая в опыте действительно оказывается чернее черной!

Для того чтобы просто пронаблюдать явление, можно поступить еще проще (но менее интересно). Возьмите белую фарфоровую чашку и закройте ее бумажной черной крышкой с небольшим отверстием — эффект будет практически таким же.

Загадка Рамануджана

(Начало см. на с. 14)

полон трогательной признательности и любви к нему...

Возвращение и смерть

Заболев, Рамануджан начинает думать о возвращении на родину. Лишь к началу 1919 г. его здоровье улучшилось настолько, чтобы совершить далекую поездку по морю. Ему было готово место в Мадрасском университете — слава его достигла Индии. Рамануджан пишет ректору благодарственное письмо, извиняется за то, что последнее время болезнь не давала возможности работать достаточно интенсивно. Но он так и не смог приступить к работе в университете. Менее года ему удалось провести на родине. После трех месяцев в Мадрасе Рамануджан перебрался в Кумбаконам. В январе 1920 г. он посылает последнее письмо Харди, где сообщает о работе над новым классом тэта-функций. Ни врачи, ни родные не могут уговорить смертельно больного ученого прервать работу. 26 апреля 1920 г. Рамануджан умер. Ему еще не исполнилось 33 года.

Память

Весть о смерти Рамануджана потрясла его друзей и в Индии, и в Англии. Они чувствовали свой долг разобраться в том удивительном явлении, каким был Рамануджан. Харди пишет:

«Возможно, что великие дни формул окончились и Рамануджану следовало бы родиться на 100 лет раньше; но он был величайшим создателем формул своего времени».

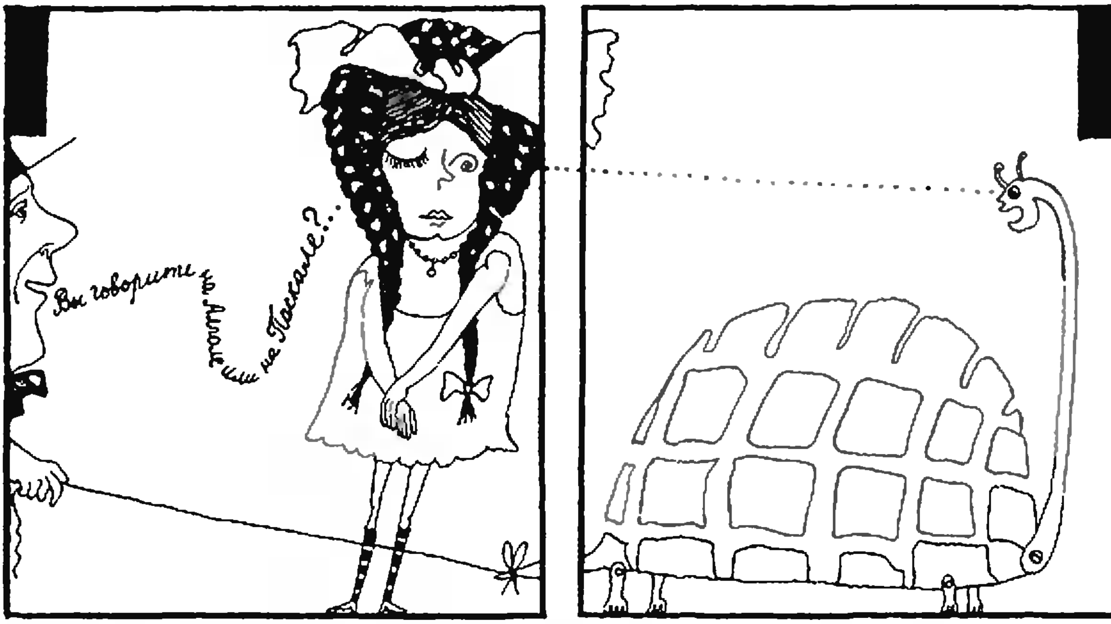
Друзья и коллеги старались оценить место Рамануджана в современной математике. Они не сомневались в его удивительных способностях, фантастической красоте формул, но все сходились на том, что сам выбор сюжетов, которых настойчиво держался Рамануджан, не позволяет ему занять достойное место в истории математики.

Прошло более полувека, и сегодня мы отчетливо видим то, что не могли предвидеть Харди и его современники. Гений Рамануджана оказался созвучен не только прошлому, но и будущему математики. Арифметические формулы Рамануджана нередко оказывались ключевыми на новых этапах алгебраической теории чисел, и можно было только удивляться, как он смог увидеть их, не зная того, без чего их увидеть нельзя. А потом пришло возрождение интереса к конкретным явным формулам как внутри математики, так и в сфере ее приложений. Современная математическая и теоретическая физика обращается порой к весьма абстрактным разделам математики, причем играют роль очень изысканные явные формулы. Вот два недавних примера, связанные с Рамануджаном.

Р. Бэкстер, прославившийся построением точно решаемых моделей статистической механики, при исследовании модели «жесткого гексагона» неожиданно обнаружил, что постоянно имеет дело с тождествами Роджерса—Рамануджана (вставка 4 на с. 19) и Рамануджана.

Нобелевский лауреат С. Вайнберг недавно вспоминал, как, занимаясь в начале 70-х годов очень популярной сейчас теорией струн, он столкнулся с задачей об оценке функции разбиений $p(n)$ для больших n. Выяснилось, что нужные формулы получили Харди и Рамануджан в 1918 г. (вставка 5 на с. 19).

Красота формул Рамануджана даровала им способность возрождаться при самых необычных обстоятельствах.



Искусство программирования

Мир языков программирования

Академик А. П. ЕРШОВ

Язык и общение

Как гласит философский словарь (Москва, Политиздат, 1986, с. 578), *язык* — это «знаковая система любой физической природы, выполняющая познавательную и коммуникативную (общение) функции в процессе человеческой деятельности». И хотя понятие языка сложилось при общении людей друг с другом, мы обнаруживаем, что взаимодействие человека и ЭВМ приобретает все больше и больше тоже характер *общения*. Действительно, мы передаем компьютеру программу его работы, формулируем условие задачи, вводим начальные данные. Если программа оказалась с ошибкой или исходные данные неполны, ЭВМ сигнализирует об этом и сообщает о том, что она «не понимает» полученную информацию.

Естественно, что общение требует языка, и то, что мы, уже не задумываясь, применяем эти понятия к ЭВМ, говорит о реальном приближении к робототехнике, искусственному интеллекту, автоматизации умственной деятельности, к тому, что относят к веку информации.

Мы общаемся с компьютером посредством разных знаковых систем. ЭВМ уже обладает зрением, слухом, осязанием, может воспринимать тексты, числа и образы. Однако самым главным органом чувств у ЭВМ являются входные устройства для восприятия электрических сигналов, а самым главным видом языка является язык записи и исполнения программ, или *язык программирования*.

Языки программирования — это главное средство передачи знаний компьютеру, при этом знаний действенных, придающих машине черты разумного поведения.

Первые языки программирования появились в середине 50-х годов, а сейчас их насчитывается более двух тысяч. На первый взгляд это удивительно. Напомним, однако, что сейчас общее количество ЭВМ в мире, включая персональные ЭВМ и однокристалльные микропроцессоры, исчисляется сотнями миллионов. Таким образом, языковая практика общения людей с компьютером уже становится сравнимой по масштабам с языковой практикой общения людей между собой. Именно это обстоятельство и стало главной причиной включения информатики в общее образование.

Главные понятия языков программирования

При огромном разнообразии языков программирования они делятся на два главных класса: *декларативные* (аппликативные, функциональные) и *императивные* (процедурные, аглоритмические). В скобках указаны варианты названий этих классов.

Поговорим о различии между этими классами. В двух словах оно состоит в следующем: декларативная программа заявляет, ЧТО должно быть достигнуто в качестве цели, а императивная программа предписывает, КАК достичь поставленной цели.

Приведем два поясняющих примера.

Пример 1. Вам надо пройти в городе из пункта А в пункт Б. Декларативная программа — это план города, в котором указаны оба пункта, плюс правила уличного движения. Руководствуясь этими правилами и планом города, курьер сам проложит путь от пункта А в пункт Б. Императивная программа — это список команд, примерно, такого рода: от пункта А по ул. Садовой на север до площади Славы, оттуда по ул. Пушкина два квартала, потом повернуть направо и идти до Театрального переулка, по этому переулку налево по правой стороне до дома № 20, который и есть пункт Б.

Пример 2. Вычислить корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \text{ при } a=2,\ b=-7,\ c=-4.$$

Декларативная программа — это четыре (более точно, пять) равенства: три для коэффициентов и одно для формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

в сочетании с правилом замены переменных и умением выполнять арифметические действия и извлекать корень из числовых аргументов.

Императивная программа — это, например, такой текст на школьном алгоритмическом языке

вещ a, b, c, $x1$, $x2$, q, r

$a:=2$
$b:=-7$
$c:=-4$
$q:=2\times a$
$r:=\sqrt{b^2-(2\times q)\times c}$
$x1:=(r-b)/q$
$x2:=-(r+b)/q$

Обсудим сходства и различия. И декларативная, и императивная программы могут выполнять одни и те же действия. Например, корни квадратного уравнения могут вычисляться в декларативной программе в такой последовательности:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ a=2;\ b=-7;$$
$$c=-4$$
$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2};$$
$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+8\cdot 4}}{4};$$
$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+32}}{4},\ x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{4};$$
$$x_1=\frac{7+9}{4};\ x_2=\frac{7-9}{4};$$
$$x_1=4;\ x_2=-0{,}5$$

Этот порядок действий практически совпадает с тем, который предписан программой на алгоритмическом языке.

В императивной программе действия задаются явными командами, вписанными в текст программы ее составителем. Исполнитель извлекает эти команды, следуя общим правилам исполнения программы. Эти правила на первый взгляд весьма различны в разных языках программирования, но на самом деле они сводятся к трем главным способам извлечения команд из программы. Эти способы — СЛЕДОВАНИЕ, ВЫБОР и ПОВТОРЕНИЕ: исполнитель либо берет очередную команду, которой однозначно предписано быть следующей за только что выполненной, либо выбирает в зависимости от УСЛОВИЯ одну команду из нескольких возможных, либо повторяет выполнение команды опять-таки в зависимости от соблюдения некоторого условия повторного исполнения. Для классических императивных языков характерно, что последовательность команд, извлекаемых из программы, совершенно однозначно предписывается видом программы и ее входными данными. Как говорят, поведение исполнителя императивной программы полностью *детерминировано*.

В декларативной программе действия не предписываются командами, а находятся самим исполнителем, побуждаемым к активности наличием недостигнутой цели. При этом также имеются три главных способа нахождения выполняемых действий, которые по своему назначению аналогичны следованию, выбору и повторению. Это соответственно ПОДСТАНОВКА, тоже ВЫБОР и РЕКУРСИЯ. Суть подстановки хорошо видна в вышеприведенном примере «декларативного» решения квадратного уравнения. Возможность подставить на место некоторого выражения (в том числе и переменной) конкретное значение дает возможность сделать следующий шаг в вычислениях.

Особенностью декларативных программ является то, что выбор действия может, как и в императивных языках, однозначно определяться некоторым условием, но кроме этого быть и произвольным. Декларативные программы не предписывают выполнять действия, а разрешают, при этом часто одно из нескольких. Например, даже в нашем простом случае решения квадратного уравнения исполнитель может сам определить, в каком порядке производить подстановку значений коэффициентов в формулу: то ли сначала $a=2$ или $b=-7$, либо $c=-4$. В формуле можно начинать вычислять то ли числитель, то ли знаменатель. Под корнем можно вычислить сначала или b^2, или $4\times a$, или $a\times c$ и т. д. Таким образом исполнение декларативных программ носит, как принято говорить, *недетерминированный* характер, что, однако, в случае правильных программ, не лишает результат однозначности и определенности.

Как *рекурсия* позволяет выполнять повторные вычисления — это само по себе очень интересная тема, которая выходит за рамки этой статьи. Коротко об этом сказано в учебнике «Основ информатики и вычислительной техники» за X класс.

Идея исполнения рекурсивной декларативной программы хорошо видна на примере вычисления 4! с использованием рекурсивного определения факториала

```
фак(n) = если n = 1
         то 1
         иначе фак(n − 1) × n
       все
```

Отправляясь от цели фак(4), исполнитель чередует подстановку с выполнением тех операций, для которых уже вычислены аргументы:

```
фак(4) = если 4 = 1 то 1
         иначе фак(4 − 1) × 4 все
       = фак(3) × 4
       = (если 3 = 1 то 1
          иначе фак(3 − 1) × 3 все) × 4
       = (фак(2) × 3) × 4
       = ((если 2 = 1 то 1
           иначе (фак(2 − 1) × 2 все) × 3) × 4
       = ((фак(1) × 2) × 3) × 4
       = (((если 1 = 1 то 1
            иначе фак(1 − 1) × 1 все) × 2) × 3) × 4
       = ((1 × 2) × 3) × 4 = (2 × 3) × 4 = 6 × 4 = 24
```

Важным общим свойством императивных языков программирования является их способность к *структурному* или *неструктурному программированию*.

В структурных программах следующая по порядку выполнения команда всегда является следующей по порядку расположения в тексте программы. Естественно, что при этом допускаются так называемые *составные* команды, однократное выполнение которых сводится к выбору или повторению содержащихся внутри них более «мелких» команд. Такая вложенность команд не противоречит основному принципу структурности.

В неструктурных программах каждая отдельная команда программы может иметь имя, называемое *меткой*. Меткой может быть число (как, например, номер строки программы в языке Бейсик) или любое слово. При наличии меток следующей по порядку исполнения командой может быть любая (а не только следующая в тексте программы) команда. Для этого достаточно приписать к текущей команде управляющую команду перехода по метке (например, на М), указав метку М той «удаленной» команды, которую хотят сделать следующей по выполнению. Такое усложнение операции следования позволяет записывать очень «хитрые» про-

НАЧ: при $m_1 > m_2$: на Хm_2
$m_1 < m_2$: на Хm_1
$m_1 = m_2$: на m_1m_3
Хm_2: Х: $= m_2$; У: $= m_1$ на ХУ
Хm_1: Х: $= m_1$; У: $= m_2$ на ХУ
m_1m_3: при $m_1 > m_3$: на m_3Л
$m_1 < m_3$: на m_3Т
$m_1 = m_3$: на НФ
ХУ: при Х $> m_3$: вывод («противоречие») на СТОП
Х $< m_3$: на ФХ
Х $= m_3$: на ФУ
m_3Л: Ф: $= m_3$ на ФЛ
m_3Т: Ф: $= m_3$ на ФТ
НФ: вывод («нет фальшивых») на СТОП
ФХ: Ф: = Х на ФЛ
ФУ: Ф: = У на ФТ
ФЛ: вывод (Ф, «легкая») на СТОП
ФТ: вывод (Ф, «тяжелая») на СТОП
СТОП: останов

Рис. 1.

граммы, которые, однако, зачастую становится трудно анализировать и понимать. Вот почему ограничение программирования структурными программами сейчас все больше считается хорошим стилем грамотного и систематического составления программ.

В качестве примера неструктурированной программы приведем алгоритм выявления одной фальшивой, т. е. более или менее тяжелой, из трех монет с массами m_1, m_2 и m_3 с помощью двух взвешиваний. Процедура взвешивания монет с массами p и q выражена в виде команды выбора с тремя исходами: $p<q$, $p>q$ и $p=q$. Сама программа выражена на смеси школьного алгоритмического языка и обычного для языков программирования способа записи меток и команд перехода по метке (рис. 1). Условное изображение блок-схемы программы (рис. 2) наглядно показывает отличие строения программы от «параллельно-последовательных» связей между простыми командами в структурных программах.

Задание. Постройте структурную версию алгоритма взвешивания, например, на школьном алгоритмическом языке.

В реальных языках программирования свойства декларативности и императивности, структурности и неструктурности встречаются обычно в сочетании. Многие языки, например Паскаль, допускают команды перехода по метке и в то же время содержат конструкции составных команд выбора и повторения, поддерживающие структурное программирование.

Почти все императивные языки допускают операцию подстановки, с помощью которой реализуются команды вызова вспомогательных алгоритмов, называемых в языках программирования *процедурами* или *подпрограммами*. При этом вызовы подпрограмм содержат параметры. При выполнении вызова происходит двойная подстановка: сначала параметры подставляются в текст подпрограммы, после чего этот текст подставляется в главную программу на место вызова. Некоторые языки допускают недетерминированный выбор направления вычислений, в том числе и параллельные вычисления по отдельным ветвям алгоритма с использованием нескольких процессоров вычислительной системы.

Большая часть современных императивных языков обеспечивает повторное исполнение конструкций программы, заданных рекурсивными соотношениями. В свою очередь, для многих рекурсивных конструкций декларативных языков существуют способы организации их вычислений с использованием команд повторения.

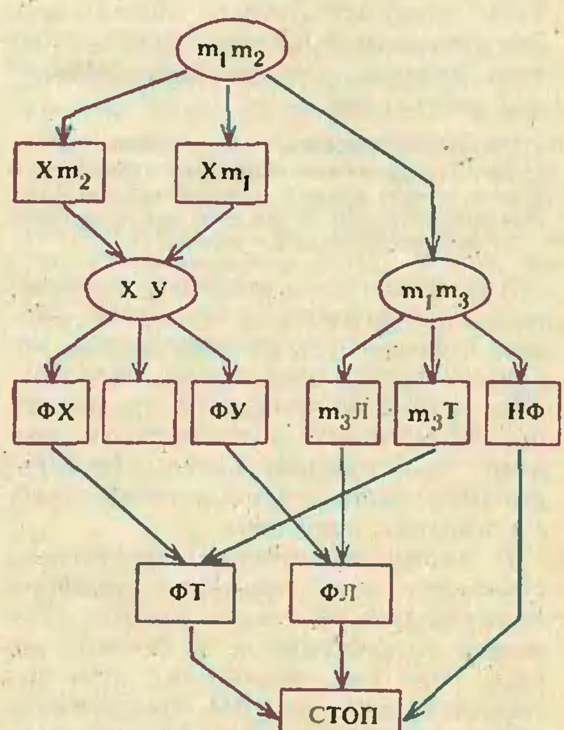


Рис. 2.

Грамматика языков программирования

Как и в нашем родном естественном языке, грамматика языка программирования учит нас правильному пониманию и использованию этого языка. Описание языка программирования обычно состоит из трех частей: *синтаксиса*, *семантики* и *прагматики*.

Синтаксис задает правила записи программ: перечисляет исходные символы, буквы, цифры, знаки препинания и устанавливает допустимые способы их сочетания. Семантика задает значение (смысл) конструкций языка программирования и обычно бывает двух типов: *операционная* и *математическая*. Операционная семантика — это набор правил для исполнения программы, а математическая семантика — это набор аксиом и следствий из них, позволяющих описать функцию, вычисляемую программой.

Общей особенностью синтаксиса и семантики языков программирования является их формальный строгий характер. Именно эта особенность позволяет передавать программы для чтения и исполнения автоматическому устройству — компьютеру. Формальный характер математической семантики позволяет строго доказывать, что программа соответствует условию задачи, для решения которой она составлена.

Задание. Докажите, что программа на рисунке 1 правильно определяет фальшивую монету из трех данных, при условии, что фальшивая монета одна и при этом она либо легче, либо тяжелее настоящих монет.

В отличие от синтаксиса и семантики прагматика — это часть описания языка программирования, исключительно адресованная человеку. Прагматика подсказывает, как наиболее эффективно применять те или иные конструкции языка при программировании, учит хорошему стилю составления программ.

В частности, именно прагматика объясняет нам причину существования языков программирования двух типов: императивных и декларативных. Мы уже знаем, что при решении задачи на ЭВМ программист проходит долгий путь от формулирования задачи к вводу машинной программы в ЭВМ для ее исполнения, т. е. фактического получения решения. Принцип автоматической работы ЭВМ неизбежно требует, чтобы программа состояла из команд, т. е. была бы записана в императивном языке.

В начале своего появления ЭВМ применялись для научных вычислений и инженерных или экономических расчетов. Общей особенностью этих применений было то, что большая часть возникающих задач уже имела точную математическую формулировку в виде формул, уравнений, интегралов и других конструкций элементарной математики и математического анализа. Поэтому, поскольку исходные формулировки задач уже в значительной мере удовлетворяли требованиям строгости, развитие языков программирования шло со стороны машины. Программисты стремились повысить уровень языка программирования, стремились избавить себя от чрезмерной мелкости и плохой наглядности машинного языка, но сохраняли его императивный характер. Повышение уровня языка шло по следующим этапам: библиотеки подпрограмм для стандартных математических функций (Англия, 1949 г.), введение символических обозначений для величин, программы (США, 1951 г.), допущение простых алгебраических формул в командах присваивания (Швейцария, 1952 г.), возможность записи команд ветвления с переходом по метке и с проверкой условия в виде неравенства (СССР, США, 1954 г.) и, наконец, появление команд повторения и величин с индексами (СССР, США, 1955 г.).

Во второй половине 50-х годов появились достаточно полные императивные языки программирования, поддержанные производственными системами программирования. Из них в первую очередь должны быть названы Фортран (от сокращения английского *FORmula TRANslator)* и Алгол (от английского *ALGOrithmic Language*). Первый язык на многие годы стал наиболее употребимым языком для инженерно-физических расчетов, а второй сосредоточил в себе весь накопленный багаж широкого использования математической символики, независимости языка от конкретной ЭВМ, точности в описании синтаксиса и семантики языка. Алгол стал родоначальником обширного семейства языков, из которых могут быть названы советский Альфа-язык, норвежский Симула, международный язык Алгол-68, швейцарский Паскаль, французский Ада.

В то же время, по мере расширения области применения ЭВМ появилось много задач, как тогда говорили, невычислительного характера, для которых серьезную трудность представила исходная проблема строгого формулирования задачи. Язык математического анализа и алгебраических формул оказался для этих задач недостаточен. Особенностью таких задач был их логический характер (типа задач «волк—коза—капуста», «взвешивание», «быки и коровы» и т. д.), а также необходимость работать со сложно организованной информацией. Тем не менее и здесь выручила математика, однако не столько ее прикладные направления, сколько глубоко теоретические разделы, связанные с обоснованием самой математики: *математическая логика*, *теория рекурсивных функций* и *теория нормальных алгоритмов*, разработанная в 40-е годы известным советским математиком Андреем Андреевичем Марковым.

Первым декларативным языком был язык ЛИСП (от английского *LISt Processing*), разработанный в США в начале 60-х годов. Он основывался на теории рекурсивных функций, обобщенной на информационные структуры, имеющие вид иерархии списков, т. е. последовательностей членов, каждый из которых мог иметь собственную структуру. Примером списочной структуры может служить контингент учащихся школы: школьный коллектив делится на группы классов от 1-го до 10-го, каждая группа — это классы А, Б, В и т. д., каждый класс — это список звеньев (там где они есть), каждое звено — это группа учащихся, упорядоченная по алфавиту. Язык ЛИСП широко применяется до сих пор.

Некоторые свойства декларативности были присущи императивному языку СНОБОЛ, разработанному тоже в начале 60-х г. в США для обработки текстовой информации. Его важным свойством была *операция поиска по образцу*, позволяющая «одним ударом» выделять в тексте достаточно сложные сочетания слов и знаков.

Свойства ЛИСПА и СНОБОЛА были объединены в разработанном в конце 60-х годов в СССР декларативном языке РЕФАЛ (от *РЕкурсивные Функциональные АЛгоритмы*).

Заключая сравнение декларативных и императивных языков, мы видим, что свойство декларативности облегчает формулирование задачи, подлежащей решению на ЭВМ, а свойство императивности приближает запись алгоритма к тому, как он будет фактически исполняться на ЭВМ. Попытка объединить эти свойства в одном языке привела недавно к появлению *языков широкого спектра*, позволяющих путем формальных преобразований программ менять соотношение ее декларативных и императивных свойств. К этому семейству языков относится французский язык ПРОЛОГ (от французского *PROgrammation LOGique*), используемый в проектах разработки ЭВМ 5-го поколения и их программного обеспечения.

* * *

Эта заметка о языках программирования предваряет сообщение об открытии Заочной школы юных программистов. В ее двухлетнем курсе учащиеся познакомятся с целым семейством современных языков программирования: от учебных языков программирования ЛОГО (США, конец 60-х гг.) и РАПИРА (СССР, конец 70-х гг.), до таких производственных языков, как близкий к машинам язык СИ (США, начало 70-х гг.) и уже упомянутый декларативный язык ПРОЛОГ (Франция, конец 70-х годов).

Об открытии Всесоюзной заочной школы программирования

Институт программных систем АН СССР открывает Всесоюзную заочную школу программирования для школьников и учащихся ПТУ, интересующихся информатикой, вычислительными машинами и программированием. Цель Школы рассказать о проблемах и перспективах информатики, об основных приемах программирования и сферах его применения, показать способы составления программ на нескольких языках программирования. Вообще говоря, предварительных знаний по информатике не предполагается, и все же в тех случаях, когда авторы уроков найдут полезным сравнение того или иного программного средства с алгоритмическим языком, на базе которого построен школьный курс «Основы информатики и вычислительной техники», 9—10 кл., в уроках Школы не будет перепечатываться содержание школьного учебника. Первые четыре урока Школы будут опубликованы в «Кванте».

Каждый урок будет включать задания из нескольких задач, решения которых следует присылать не позже, чем через месяц после получения задания. Учебный план Школы рассчитан на два года.

Уроки Заочной школы рассчитаны на учащихся, не располагающих вычислительной техникой. Тем не менее тому, кто имеет возможность проверить правильность своего решения на доступной ему ЭВМ, рекомендуется не пренебрегать такой возможностью.

Желающие принять участие в работе Всесоюзной заочной школы программирования должны до получения 11 номера журнала прислать свои заявления по такой форме:

Во Всесоюзную заочную школу программирования
152140 Переславль-Залесский, а/я 46,
Институт программных систем АН СССР
от ________________________________

(фамилия) (имя) (отчество)

Заявление

Прошу принять меня во Всесоюзную заочную школу программирования.

____

(подпись)

К заявлению надо приложить листок со своими анкетными данными:

— фамилия, имя, отчество;
— возраст (число, месяц, год рождения);
— подробный домашний адрес с обязательным указанием почтового индекса;
— номер (или название) школы (ПТУ) и класс;
— краткие сведения об уровне своей подготовки по программированию (допустимо сообщение о нулевой подготовке);
— если вам доступна ЭВМ, то сообщите сведения о ее программном обеспечении (наличие трансляторов Лого, Рапира, Си, Рефал, Пролог);
— краткие сведения о родителях — фамилия, и. о., профессия, место работы, должность.

Заявление и письма с решениями задач присылайте, вложив в письмо конверт с маркой и отчетливо написанным обратным адресом.

Первое задание Школы — это задачи 1—6 из Урока 1.

В Заочной школе могут заниматься и группы учащихся — «коллективные ученики». «Коллективный ученик» должен написать в анкете состав группы, фамилию, имя и отчество преподавателя или руководителя группы и точный адрес для переписки.

Летом 1988 и 1989 годов в четырех городах Советского Союза — Новосибирске, Вильнюсе, Симферополе и Переславле-Залесском будут проходить региональные летние школы юных программистов. Дирекция Всесоюзной заочной школы программирования будет рекомендовать оргкомитетам этих школ приглашать на летние школы лучших учащихся.

Язык Лого

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Урок 1: Путешествия Черепахи (простейшие команды Лого)

— Можете ли вы управлять телевизором?

— Конечно! Надо включить его в сеть, выбрать нужный канал, настроить изображение и звук.

Так же легко, наверное, вы можете управлять велосипедом, газовой плитой, телефоном и другими привычными исполнителями.

Мы живем в мире исполнителей. Всевозможные машины и механизмы, приборы, простые и сложные. В роли исполнителей часто выступаем мы сами. Исполнителями являются и организации, такие, как почта, прачечная, магазин. В этом мире исполнителей выделяется один особый их вид — электронно-вычислительные машины. Их особая роль — помочь управлять другими исполнителями, самыми разными по назначению и устройству. ЭВМ при этом выступает в роли *посредника*. Человек с пульта машины задает программу действий исполнителю на специальном языке человеко-машинного общения — языке программирования. Задача машины — преобразовать фразы этого языка в управляющие сигналы и передать их исполнителю.

Каков смысл в этом посредничестве? Во-первых, язык программирования гораздо более близок к естественному языку, нежели электрические, магнитные или механические воздействия на исполнитель. Во-вторых, машина позволяет запоминать программу и «вспоминать» ее всякий раз, когда это потребуется. В-третьих, пользуясь языком программирования, можно задавать не только простые последовательности команд, но и более сложные действия: некоторые команды исполнитель может выполнять лишь при соблюдении определенных условий — условные команды; выполнение других заключается в многократном повторении группы действий — команды цикла. Наконец, ЭВМ обладает огромным быстродействием — до миллиарда операций в секунду и больше; она не знает усталости и имеет хоть и «железный», но вполне сносный характер: ей не знакомы обидчивость, заносчивость, раздражительность и другие чисто человеческие недостатки.

Первые четыре урока Заочной школы программирования познакомят вас с *программированием на языке Лого*. Этот язык предназначен для управления разными простыми исполнителями. Мы уделим внимание одному из них, по традиции называемому *Черепахой*. Этот исполнитель живет на плоскости. Он может ползать по ней в разных направлениях, оставляя за собой след. Можно себе представить этот исполнитель, реально выполненным из металла и пластика.

Однако зачастую такой исполнитель бывает виден только на экране дисплея. Надо отметить, что это довольно типичная ситуация. Многие полезные и необходимые исполнители существуют только в виде *моделей*, запрограммированных на ЭВМ. За их поведением можно наблюдать на экране. Может показаться, что они бесполезны, поскольку неосязаемы, словно призраки. Опровергнуть это мнение можно простым перечислением нескольких активно используемых исполнителей, существующих только «внутри» машины.

— *Математик.* Способен быстро и точно делать огромные по объему арифметические и алгебраические вычисления.

— *Редактор текстов.* Позволяет хранить, преобразовывать тексты и выдавать их на печать в нужном формате.

— *Редактор рисунков.* Удобное средство для создания на экране картинок, в том числе мультипликаций.

— *Библиотекарь.* Хранит на магнитной ленте или магнитном диске готовые рисунки, результаты счета, программы; ведет архив.

Исполнитель Черепаха и язык для его управления — Лого — были придуманы в 1969 году известным американским ученым С. Пайпертом. Лого быстро завоевал популярность во всем мире как язык для начального знакомства с программированием.

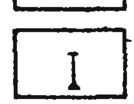
Начинать изучение программирования проще всего на своем родном языке. Поэтому у Лого так много версий: в американских школах используется Лого, все команды которого записываются по-английски; болгарские преподаватели учат своих детей на болгароязычной версии Лого. В наших уроках, естественно, исполнитель понимает только русские слова. Об этом должен помнить читатель, который захочет выполнить приводимые здесь программы на доступной ему ЭВМ, если в ее программное обеспечение включен англоязычный Лого.

Внимание! Включаем компьютер. В центре экрана появляется изображение исполнителя в виде треугольника-стрелки, направленного носиком кверху. Это и есть Черепаха. Рядом с экраном — клавиатура. Она такая же, как на пишущей машинке, только клавишей на ней несколько больше.

Вы готовы? Исполнитель ждет. Вот первые две команды на языке Лого: ВПЕРЕД *n*, НАЗАД *n*. Можно писать сокращенно В вместо ВПЕРЕД и Н вместо НАЗАД, машина поймет. Число *n* — *параметр команды* — задает количество шагов исполнителя. У Черепахи короткие лапы: 10 ее шагов — условных единиц длины — примерно составляют 1 см.

Итак, попробуем управлять:

ВПЕРЕД 20 

НАЗАД 20 

Получилось! Черепаха сначала переместилась вперед, а затем вернулась в исходное положение. На экране остались следы ее прогулки.

Вот еще две команды Лого: они управляют поворотами: ВПРАВО α, ВЛЕВО α. Эти команды (их допустимые сокращения — П и Л) заставляют исполнитель поворачиваться соответственно вправо или влево на α градусов.

Давайте заставим Черепаху прогуляться по квадратной дорожке:

Черепаха очень послушна! Наберем на клавиатуре еще одну команду НАЗАД100. Черепаха не тронулась с места, а на экране появилось сообщение: ЧТО ТАКОЕ НАЗАД100?

Дело в том, что в языке Лого, так же, как и в русском языке, слова разделяются пробелами. Машина пыталась найти в своей памяти команду НАЗАД100, но, конечно, ее там нет.

Давайте исправимся! Набираем на клавиатуре: НАЗАД 100. Теперь на экране получился флажок (рис. 1).

Задача 1*. Составьте программу, по которой Черепаха нарисует кораблик (рис. 2).

Команда СБРОС стирает с экрана черепашьи следы и устанавливает исполнитель в центр экрана носиком кверху. Включение компьютера эквивалентно выполнению этой команды. Нарисуем равносторонний треугольник. Каждый его угол равен 60 градусам. Так и хочется написать программу:

```
СБРОС В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
```

Рис. 1.

Рис. 2.

Как вы думаете, что получится на экране? Треугольник? Вот вы и ошиблись, Черепаха нарисует вот такую фигуру (рис. 3).

Вы увидели ошибку? Чтобы внутренние углы треугольника имели по 60 градусов, надо каждый раз разворачивать Черепаху на 120. Вот как выглядит правильная программа:

```
СБРОС В 50 П 120
      В 50 П 120
      В 50 П 120
```

Задача 2*. Оснастите кораблик из задачи 1 парусом (рис. 4).

Следующие две команды позволят перемещать исполнитель по экрану, не оставляя следа (поднимать рисующий инструмент — «карандаш») и снова включить след по желанию (опускать карандаш): НЕРИСУЙ (сокращение НР), РИСУЙ (сокращение Р). Отметим, что операция опускания карандаша является составной частью выполнения команды СБРОС.

Правила Лого не всегда совпадают с правилами родного языка. Если с точки зрения русского языка правильно написать НЕ РИСУЙ, то, получив такую команду, ЭВМ снова удивится: ЧТО ТАКОЕ НЕ?

Задача 3*. Какое слово напишет на экране Черепаха, выполняя следующую программу:

```
СБРОС
В 40 Л 45 Н 20 П 90 В 20 Л 45 Н 40
НР П 90 В 20 Л 90 Р
В 40 Н 40 П 45 В 50 Л 40 Н 40
НР П 90 В 20 Л 90 Р
В 40 П 90 В 30 П 90 В 20 П 90 В 30
```

Интересно, что бы получилось у Черепахи, если бы мы продолжили неверную программу рисования треугольника (см. рис. 1) и написали:

```
СБРОС В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
      В 50 П 60
```

Ясно, что в конце пути Черепаха смотрит вверх, ведь она 6 раз поворачивалась на 60 градусов. Более того, она окажется вновь в исходной точке.

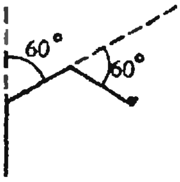


Рис. 3.

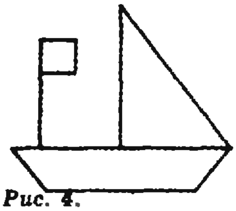


Рис. 4.

Черепаха нарисовала правильный шестиугольник! Обратите внимание, что рисунок получен шестикратным повторением двух команд. Лого обладает средством для более лаконичной записи таких повторений — командой *цикла*. Команда имеет вид:

ПОВТОРИ nl.

Число n задает количество повторений. l — это список команд (*тело цикла*), выделяемый квадратными скобками.

Вот как выглядит программа рисования правильного шестиугольника с использованием команды цикла:

СБРОС ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60]

Задача 4*. Составьте программу, рисующую ель (рис. 5).

Мы заставили исполнитель рисовать шестиугольник. Попробуем просто приказать: ШЕСТИУГОЛЬНИК. Вы правы! ЭВМ снова напишет знакомое:

ЧТО ТАКОЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК?

В общем-то, все правильно. Ведь мы не сообщили ей, что ранее записанная совокупность команд называется ШЕСТИУГОЛЬНИК.

Научить исполнитель понимать новые незнакомые слова и воспринимать их как команды можно с помощью еще одной команды языка Лого. Команда, начинающаяся словом ЭТО, заставляет машину запоминать любую программу — последовательность команд (или, в частности, одну команду), завершающуюся словом КОНЕЦ. Именно запоминать, а не выполнять! Вслед за словом ЭТО надо написать имя, под которым машина будет знать запоминаемую программу. Так, запись

Рис. 5.

```
ЭТО ШЕСТИУГОЛЬНИК
  ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60]          (1)
КОНЕЦ
```

есть команда запоминания программы (здесь состоящей из одной команды)

ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60]

Выполняя команду ЭТО, машина не посылает никаких указаний исполнителю и, следовательно, Черепаха не двигается с места. Действительно, ЭВМ в это время занята запоминанием программы, имеющей имя ШЕСТИУГОЛЬНИК. Под таким именем эту программу можно теперь вызывать для выполнения. Для этого достаточно набрать на клавиатуре слово

ШЕСТИУГОЛЬНИК

и Черепаха выполнит уже знакомый рисунок. Таким образом машина «научилась» новой команде — ШЕСТИУГОЛЬНИК.

Программа, хранящаяся в памяти машины и имеющая имя, по которому ее можно вызвать для выполнения, называется *процедурой*. Запись (1), включающая строки ЭТО ШЕСТИУГОЛЬНИК (заголовок описания процедуры) и КОНЕЦ (окончание описания), есть *описание процедуры*, а собственно команды запоминаемой программы (в нашем примере строка ПОВТОРИ 6 [В 50 П 60] — *тело* процедуры.

Задача 5*. Составьте процедуру, рисующую дом (рис. 6).

Попробуем теперь нарисовать что-нибудь посложнее — например, соты для пчел (рис. 7).

Разобьем рисунок на три слоя. Процедура СОТЫ будет иметь вид:

```
ЭТО СОТЫ
   ПОВТОРИ 3 [СЛОЙ]
КОНЕЦ
```

Каждый слой (рис. 8) будем начинать рисовать в точке 1 и заканчивать в точке 4. Это гарантирует правильную стыковку слоев друг с другом при выполнении цикла в процедуре СОТЫ.

```
ЭТО СЛОЙ
 РЯД
 ПОДВОДВ3
 РЯД
 ПОДВОДВ4
КОНЕЦ
```

В описании процедуры СЛОЙ использованы вызовы трех, еще не запрограммированных процедур РЯД, ПОДВОДВ3, ПОДВОДВ4. Вызывать процедуру СЛОЙ нельзя, пока они

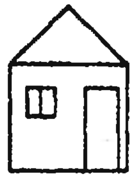


Рис. 6.

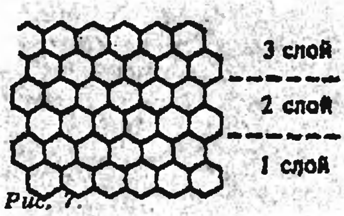


Рис. 7.

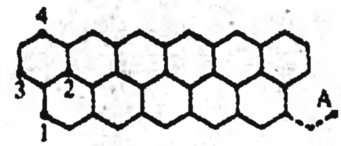


Рис. 8.

не описаны. Опишем процедуру РЯД:

```
ЭТО РЯД
 ПОВТОРИ 8 [ШЕСТИУГОЛЬНИК ПОДВОД]
КОНЕЦ
```

Хотя, по-видимому, понятно, что именно поручено делать процедуре РЯД, в ее описании есть вызов еще одной, пока не описанной процедуры ПОДВОД. Процедура ПОДВОД необходима для установки Черепахи к месту, с которого она должна начать очередной шестиугольник в ходе рисования ряда:

```
ЭТО ПОДВОД
  НР Л 60 Н 50
  Л 60 Н 50
  П 120        Р
КОНЕЦ
```

Подвод в точку 3 состоит из возврата в точку 1 и перемещения в точку 3:

```
ЭТО ПОДВОДВ3
  НР ВОЗВРАТ
  В 50 Л 60
  В 50 П 60 Р
КОНЕЦ
```

Возврат делается из точки А в точку 1 девятикратным вызовом процедуры ШАГНАЗАД:

```
ЭТО ВОЗВРАТ
  ПОВТОРИ 9 [ШАГНАЗАД]
КОНЕЦ
```

Опишем процедуру ШАГНАЗАД:

```
ЭТО ШАГНАЗАД
  Л 120 В 50
  П 60 В 50
  П 60
КОНЕЦ
```

Осталось описать процедуру ПОДВОДВ4:

```
ЭТО ПОДВОДВ4
  ВОЗВРАТ
  В 50 П 60
  В 50 Л 60
КОНЕЦ
```

Вот и все! Если теперь очистить экран: СБРОС, и выдать команду СОТЫ, то можно будет увидеть, как исполнитель, тщательно следуя нашим предписаниям нарисует шестигранные ячейки.

Задача 6*. Составьте программу для рисования а) улицы из 10 домов, таких как в задаче 5; б) поселка из пяти улиц.

Задача 7. Составьте программу, которая рисует еловый лес из деревьев задачи 4.

На примере рисования сот показан метод проектирования сложных программ, называемый в информатике методом «сверху вниз». Этот метод похож на рисование *дерева*, растущего ветвями вниз (рис. 9).

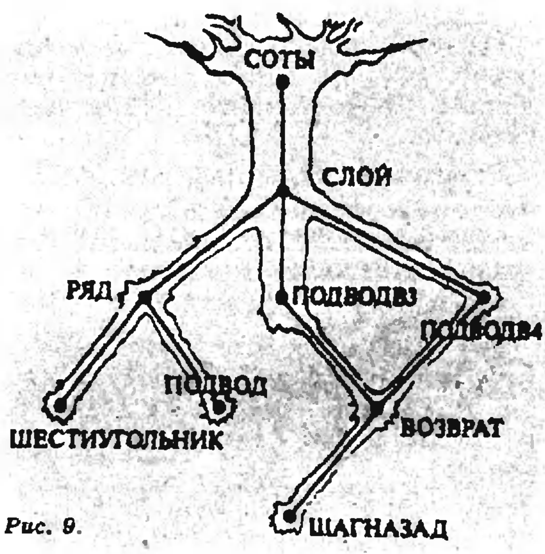


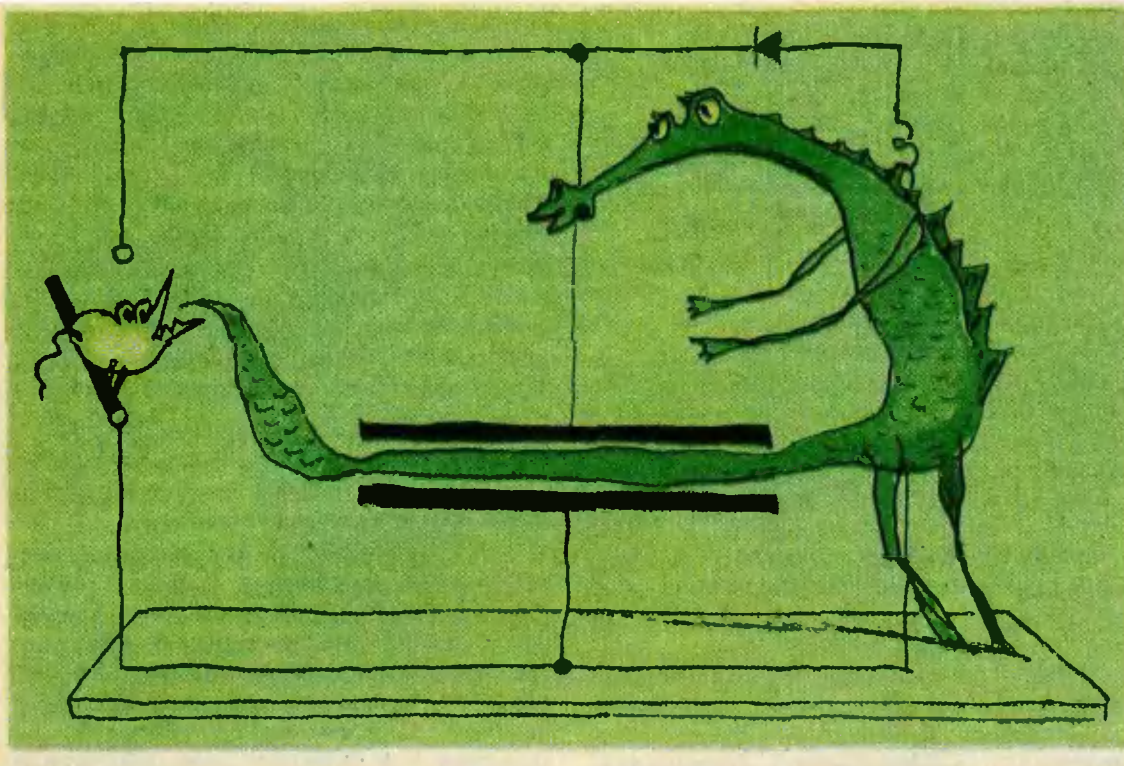
Рис. 9.

Планируя процедуру СОТЫ, записываем обращение к процедуре СЛОЙ. Теперь начинаем проектировать процедуру СЛОЙ. В ней не обойтись без процедур РЯД, ПОДВОДВ3, ПОДВОДВ4 и т. д. Иными словами, мы начинаем с общей схемы задачи, вводя команды вызова несуществующих процедур. Каждую такую новую команду описываем при помощи процедуры, в которой, в свою очередь, могут появиться вызовы новых, не описанных процедур и т. д.

Вершины дерева, у которых нет растущих вниз ветвей, называются *листьями*. Чтобы программа могла работать, все имена на листьях должны быть правильными командами языка Лого. В этом смысле дерево на рисунке 9 не является полным.

Задача 8. Дополните дерево процедуры СОТЫ так, чтобы на листьях были записаны команды языка Лого.

Внимание! Напоминаем, что проверяться будут только задачи 1—6, помеченные звездочкой.



Практикум абитуриента

Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин

Кандидат физико-математических наук
В. В. МОЖАЕВ

Многие характерные ошибки абитуриентов при решении электростатических задач обусловлены формальным пониманием связи между потенциалами и зарядами проводников. А связи эти весьма разнообразны. Например, между проводниками может существовать разность потенциалов при отсутствии зарядов на них или, наоборот, при нулевой разности потенциалов проводники могут быть заряжены. Возможен также промежуточный вариант — на проводниках находятся заряды и между ними существует разность потенциалов.

К последнему случаю относится широко распространенная ситуация, когда два уединенных проводника (другие проводники отсутствуют) заряжены одинаковыми по величине, но противоположными по знаку зарядами. В такой системе разность потенциалов U, возникшая между проводниками, пропорциональна заряду q на них:

$$U \sim q, \text{ или } q = CU, \qquad (*)$$

где C — коэффициент пропорциональности, называемый электроемкостью двух проводников. Как известно, C зависит только от размеров и формы проводников, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Еще раз подчеркнем, что линейная связь между разностью потенциалов и зарядом на проводниках не является универсальной. Она сохраняется только тогда, когда не сказывается влияние других проводников и заряды на двух данных проводниках равны по величине и противоположны по знаку. Другими словами, когда силовые линии электрического поля, выйдя с одного проводника, замыкаются на другом. Типичным примером такой системы является конденсатор. Он представляет собой два проводника,

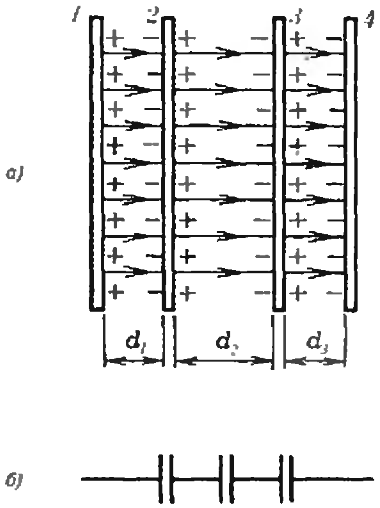


Рис. 1.

разделенные слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников (обкладок конденсатора).

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Все они предлагались в различное время на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Две металлические незаряженные пластины 2 и 3 расположены внутри плоского заряженного конденсатора (рис. 1, а). В конденсаторе существует однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_0$. Чему равна разность потенциалов между пластинами 2 и 3, если расстояние между ними равно d_2?*

В этой задаче реализован первый частный случай, когда проводники не заряжены, а разность потенциалов между ними существует.

Пластины 2 и 3 формально образуют плоский конденсатор, но они не являются изолированными — рядом с ними находятся другие пластины, да еще заряженные. Поэтому соотношение (*) не выполняется, если под коэффициентом C понимать емкость между пластинами 2 и 3: заряды на этих пластинах отсутствуют, а разность потенциалов между ними не равна нулю.

Найдем эту разность потенциалов, причем двумя способами. Сначала не будем прибегать к понятию емкости, а используем только определение разности потенциалов. По определению разность потенциалов между пластинами 2 и 3 численно равна работе по перемещению единичного положительного заряда от пластины 2 к пластине 3. Во внешнем поле $\vec{E}_0$ на пластинах 2 и 3 произойдет перераспределение зарядов: левые поверхности этих пластин зарядятся отрицательно, а правые положительно (как это и показано на рисунке 1, а). Очевидно, что поле между пластинами останется равным $\vec{E}_0$, а поверхностная плотность зарядов на них будет равна $\sigma = \varepsilon_0 E_0$ (попробуйте самостоятельно показать это, используя принцип суперпозиции электрических полей). Тогда разность потенциалов между пластинами

$$\Delta\varphi_{23} = E_0 d_2,$$

где d_2 — расстояние между внутренними поверхностями пластин.

А теперь найдем эту разность потенциалов, используя понятие емкости. Наша система четырех пластин будет эквивалентна системе трех последовательно соединенных плоских конденсаторов, приведенной на рисунке 1, б. Действительно, каждую из пластин 2 и 3 можно как бы расщепить на две части, сохраняя на каждой из них свой заряд, а поскольку они (две части) находятся при одинаковом потенциале, то их можно закоротить. Общая емкость всей системы

$$C_{14} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2 + d_3},$$

где S — площадь каждой пластины, а общая разность потенциалов

$$U_{14} = E_0 (d_1 + d_2 + d_3).$$

Тогда заряд

$$q = C_{14} U_{14} = E_0 \varepsilon_0 S.$$

При последовательном соединении заряды на конденсаторах равны, поэтому разность потенциалов на конденсаторе 2—3 будет равна

$$U_{23} = \frac{q}{C_{23}} = \frac{E_0 \varepsilon_0 S}{\varepsilon_0 S / d_2} = E_0 d_2.$$

Задача 2. *Закоротим проводником пластины 2 и 3, рассмотренные в предыдущей задаче, и найдем появившиеся на них заряды.*

Очевидно, что если пластины 2 и 3 соединить накоротко, то разность потенциалов между ними станет равной нулю, а на пластинах появятся равные по величине, но противоположные по знаку заряды (рис. 2, а). Таким образом, в этой задаче рассматривается второй частный случай, когда заряды на проводниках есть, а разности потенциалов нет.

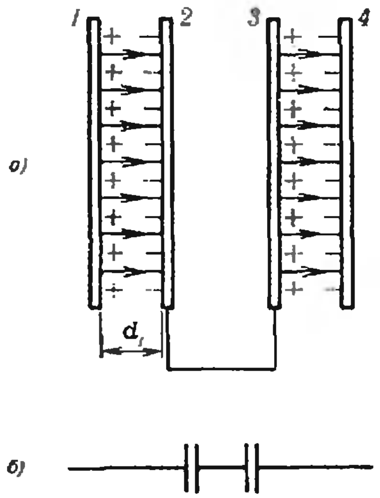


Рис. 2.

Найдем заряд на пластинах 2 и 3 теми же двумя способами. Поскольку разность потенциалов между пластинами равна нулю, то и напряженность электрического поля в промежутке 2—3 также равна нулю. А это поле является результирующим полем, создаваемым конденсатором и зарядами на пластинах 2 и 3. Пусть на пластине 2 находится заряд $-q$, на пластине 3 — заряд $+q$, а поле конденсатора равно $\vec{E}_0$, тогда результирующее поле между пластинами 2 и 3 будет равно $E_0 - q/(\varepsilon_0 S) = 0$. Из этого условия находим

$$q = \varepsilon_0 S E_0.$$

Эквивалентная схема для этого случая показана на рисунке 2, *б*. Это система двух последовательно соединенных конденсаторов. Заряд на пластине 2 найдем из рассмотрения конденсатора, образованного пластинами 1 и 2:

$$q = C_{12} U_{12} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} E_0 d_1 = \varepsilon_0 S E_0.$$

Совершенно аналогично можно получить заряд и на пластине 3.

Задача 3. *На пластине 1 находится заряд q, пластина 2, находящаяся от пластины 1 на расстоянии d, не заряжена. Чему равна разность потенциалов между этими пластинами?*

Как видно, в этом случае на проводниках находятся произвольные заряды, а между проводниками существует разность потенциалов.

Опять будем решать задачу двумя способами. Под действием поля, создаваемого зарядами пластины 1, на левой стороне пластины 2 будет индуцирован отрицательный заряд, а на правой — положительный заряд той же величины (рис. 3, *а*). Напряженность электрического поля в промежутке 1—2 определяется зарядом на пластине 1 и равна $E = q/(2\varepsilon_0 S)$, а разность потенциалов

$$U_{12} = Ed = \frac{qd}{2\varepsilon_0 S}.$$

Теперь рассмотрим эту задачу с точки зрения понятия емкости. Пластину 2 можно представить двумя закороченными между собой пластинами 2′ и 2″, суммарный заряд на которых равен нулю. Двумя же пластинами 1′ и 1″ можно представить и пластину 1 (при сохранении суммарного заряда q). Введем в рассмотрение емкость уединенной пластины — конденсатора, у которого вторая обкладка удалена в бесконечность. Обозначим эту емкость через $2C_0$. Емкость такой пластины можно представить как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов, у каждого из которых одной из обкладок является одна сторона нашей пластинки, а другая находится в бесконечности. Емкость такого конденсатора будет, очевидно, равна C_0. На рисунке 3, *б* показана эквивалентная схема для случая двух пластин, одна из которых заряжена. По этой схеме действительно подводимый заряд q перераспределяется между пластинами 1′ и 1″, а суммарный заряд на пластинах 2′ и 2″ равен нулю. Общая емкость такого соединения конденсаторов

$$C_{об} = \frac{CC_0}{C + C_0} + C_0 = \frac{C_0(2C + C_0)}{C + C_0}.$$

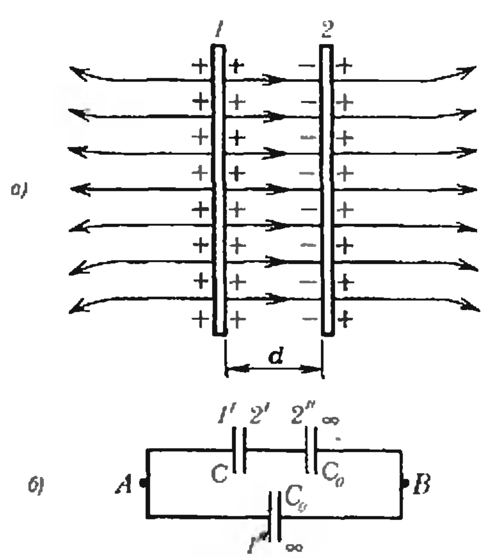


Рис. 3.

Тогда разность потенциалов между точками A и B

$$U_{AB}=\frac{q}{C_{об}}=\frac{q(C+C_0)}{C_0(2C+C_0)},$$

а искомая разность потенциалов между пластинами *1* и *2* (в эквивалентной схеме это напряжение между пластинами *1'* и *2'*) будет равно

$$U_{12}=\frac{q}{2C+C_0}\approx\frac{q}{2C}=\frac{qd}{2\varepsilon_0 S}$$

(здесь мы пренебрегли величиной емкости C_0 по сравнению с емкостью C).

Задача 4. *В схеме, изображенной на рисунке 4 (величины C, R, $\mathscr{E}$ известны), при разомкнутом ключе K заряд левой обкладки плоского конденсатора равен нулю. Определите начальный заряд правой пластины конденсатора, если после замыкания ключа на резисторе R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.*

В отличие от предыдущей задачи здесь между пластинами дополнительно поддерживается разность потенциалов, равная $\mathscr{E}$.

Обозначим начальный заряд на правой пластине конденсатора через q_0. Будем полагать, что он равномерно распределен по поверхности (как внутренней, так и внешней) пластины. Наличие заряда q_0 приводит к тому, что в пространстве между обкладками существует однородное электрическое поле с напряженностью

$$E_0=\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S},$$

где S — площадь пластины, а между пластинами имеется разность потенциалов

$$U_0=E_0 d=\frac{q_0 d}{2\varepsilon_0 S},$$

где d — расстояние между пластинами.

Пусть $U_0<\mathscr{E}$, тогда после замыкания ключа конденсатор начнет подзаряжаться. На его правой пластине заряд будет увеличиваться, а на левой пластине появится заряд противоположного знака, равный по величине дополнительному заряду на правой пластине (но не полному заряду на ней!). При этом источник будет совершать положительную работу, заряжая пластины конденсатора. Подзарядка пластин будет идти до тех пор, пока разность потенциалов на конденсаторе U не станет равной ЭДС источника $\mathscr{E}$. Пусть за время зарядки через источник протек заряд q, тогда условие равенства напряжения на конденсаторе ЭДС батареи будет иметь вид

$$\frac{q_0 d}{2\varepsilon_0 S}+\frac{q}{C}=\mathscr{E}.$$

Учитывая, что $C=\varepsilon_0 S/d$, получим

$$q=\mathscr{E}C+\frac{q_0}{2}.$$

Найдем теперь то количество теплоты, которое выделится на резисторе R за время зарядки. Работа, совершенная источником, частично пошла на увеличение энергии электрического поля в пространстве между пластинами конденсатора, а частично на нагревание резистора:

$$\mathscr{E}q=\Delta W+Q.$$

Энергию электрического поля будем вычислять через объемную плотность энергии электрического поля, равную $\varepsilon_0 E^2/2$. При разомкнутом ключе K эта энергия равна

$$W_0=\frac{q_0^2}{8\varepsilon_0 S^2}Sd=\frac{q_0^2 d}{8\varepsilon_0 S}=\frac{q_0^2}{8C}.$$

После зарядки конденсатора энергия электрического поля между пластинами увеличится и станет равной

$$W=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q_0}{2\varepsilon_0 S}+\frac{q}{Cd}\right)^2 Sd=$$

$$=\frac{q_0^2}{8C}+\frac{q_0 q}{2C}+\frac{q^2}{2C}.$$

Увеличение энергии электрического поля

$$\Delta W=W-W_0=\frac{q(q_0+q)}{2C}.$$

Тогда полный энергетический баланс можно записать в виде

$$\mathscr{E}q=\Delta W+Q=\frac{q(q_0+q)}{2C}+Q,$$

откуда найдем количество теплоты, выделившееся на резисторе:

$$Q=\mathscr{E}q-\frac{q(q_0+q)}{2C}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для заряда q (из условия равенства разности потенциалов между

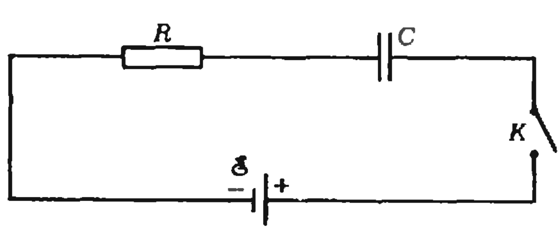


Рис. 4.

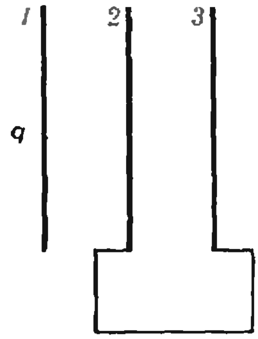


Рис. 5.

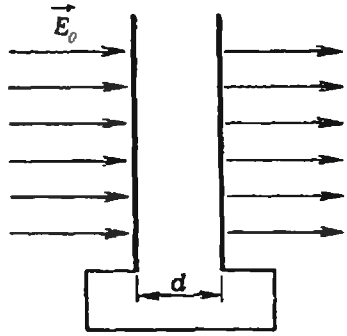


Рис. 6.

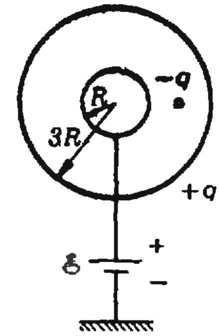


Рис. 7.

пластинами ЭДС источника), окончательно получим

$$Q=\mathscr{E}\left(\mathscr{E}C-\frac{q_0}{2}\right)-\frac{(\mathscr{E}C-q_0/2)(\mathscr{E}C+q_0/2)}{2C}=$$

$$=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}+q_0\left(\frac{q_0}{8C}-\frac{\mathscr{E}}{2}\right).$$

Как видно, выделившееся количество теплоты Q не будет зависеть от начального заряда q_0 на правой пластине при двух значениях q_0:

$$q_1=0 \text{ и } q_2=4C\mathscr{E}.$$

Следует подчеркнуть, что для расчета энергии электрического поля между пластинами конденсатора как до замыкания ключа K, так и после замыкания мы не могли использовать формулы для энергии заряженного конденсатора, поскольку на правой пластине в обоих случаях находился «избыточный» заряд q_0.

Возникает вопрос: а можно ли в этом случае «построить» эквивалентную схему и решить задачу, используя понятие емкости? Одной эквивалентной схемой в данном случае не обойтись — необходимо вводить еще и эквивалентный заряд. Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что в данном случае эквивалентная схема будет такая же, как и на рисунке 3, *б*, эквивалентный заряд после зарядки равен q_0+2q, а до замыкания ключа он совпадает с зарядом на правой пластине q_0.

Упражнения

1. Две металлические пластины образуют плоский конденсатор. На одной из пластин находится заряд $+q$, а на другой $+Nq$. Определите разность потенциалов между пластинами, если расстояние между ними d, а площадь каждой пластины S. Задачу решите двумя способами.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис. 5). На пластине *1* находится заряд q, а незаряженные пластины *2* и *3* закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину *2*. Площадь каждой пластины S.

3. В схеме, изображенной на рисунке 4 (C, R, $\mathscr{E}$ — заданы), при разомкнутом ключе K пластины плоского конденсатора заряжены одноименными зарядами, сумма которых равна q_0. Определите начальные заряды каждой из пластин, если после замыкания ключа на резисторе R выделяется такое же количество теплоты, как и в случае, когда конденсатор вначале не заряжен.

4. Две соединенные проводником пластины конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (рис. 6) во внешнем однородном электрическом поле, напряженность которого $\vec{E}_0$. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

5. В системе, изображенной на рисунке 7, радиус внутренней проводящей сферы R, внешней (тоже проводящей) $3R$. Расстояние от центра системы до заряда $-q$ равно $2R$. Зная величины q, $\mathscr{E}$, R, определите заряд на внутренней сфере. Потенциал земли принять равным нулю.

Дорогие читатели!

В будущем, 1988 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. Если вы не успеете оформить годовую подписку (последний срок — 31 октября 1987 года), не огорчайтесь. На любой номер, начиная с февральского, вы сможете подписаться не позднее первого числа предподписного месяца. Подписка принимается в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

„Квант" улыбается

Задачи, расположенные по цепочке

Скажу сразу, что я не знаю, кто выдумал эти задачи. Некоторые из них мне рассказал Олег Владимирович Долгов. Может быть, вы его видели на экране телевизора, потому что он давно уже выступает в команде знатоков в телепередаче «Что? Где? Когда?». Но хотя он и знаток, оказалось, что и он не знает, кто автор этих задач. Кроме задач, рассказанных мне О. В. Долговым, есть еще и другие задачи такого типа — некоторые из них я слышал раньше, но тоже не мог установить, кто их автор. Задачи мне очень понравились, и я решил их изложить на страницах «Кванта». Надеюсь, что и вам они понравятся и, кроме того, быть может, кто-нибудь из читателей укажет нам их автора (или авторов). А может быть, и сами авторы увидят свои задачи напечатанными и объявятся. Итак, вот эти задачи.

Задача № 1. Сколько нужно проделать операций, чтобы засунуть бегемота в холодильник?

После того, как О. В. Долгов задал мне эту задачу, я задумался... Долгов пришел мне на помощь:

— Я вам скажу, как решается первая задача. Для того чтобы поместить бегемота в холодильник, требуется совершить три операции:

1. Открыть холодильник.
2. Положить бегемота в холодильник.
3. Закрыть холодильник.

Из этого решения я уяснил себе, что понимается под словом «операция». Каждое из указанных в решении действий и есть операция. После этого мне была задана следующая задача.

Задача № 2. Сколько операций надо проделать для того, чтобы положить в холодильник жирафа?

Подумав немного, я сказал:

— Наверное, для того, чтобы положить жирафа в холодильник, надо проделать больше операций, чем для того, чтобы положить туда бегемота.

— Почему? — спросил О. В. Долгов.

— Потому что жираф не влезет в холодильник. Его нужно предварительно сложить.

— Не нужно его складывать, — сказал О. В. Долгов,— холодильник достаточно велик. Жираф может свободно в нем поместиться, если там нет никого другого.

— Тогда, как и в предыдущей задаче, достаточно трех операций — открываем холодильник, кладем жирафа, закрываем.

— Нет, неверно. На этот раз нужно проделать четыре операции, — сказал О. В. Долгов. И перечислил эти операции:

1. Открываем холодильник.
2. Вынимаем бегемота.
3. Кладем жирафа.
4. Закрываем холодильник.

Надо ли что-то объяснять?! Я забыл, что холодильник был занят! После первой задачи в холодильнике остался бегемот.

Затем мне была задана

Задача № 3. Бегемот и жираф находятся на суше на расстоянии 1 километра от берега реки. Кто из них быстрее добежит до воды?

Когда решаешь такого рода задачи, думать бесполезно. Тем не менее, я подумал и сказал:

— Жираф быстрее добежит, у него ноги длинные.

— Неправильный ответ,— сказал О. В. Долгов.

— А какой ответ правильный?

— Скорее добежит до берега бегемот.

— Почему?

— Потому что жираф остался в холодильнике...

Я засмеялся, и мне была предложена следующая задача:

Задача № 4. Сколько бегемотов умещается в кузове пятитонного грузовика?

На этот раз я призадумался, но Олег Владимирович не дал мне размышлять долго:

— Вы не теряйте зря времени, я вам сам подскажу ответ: умещается пять тонн бегемотов — полный кузов. А теперь сами решите задачу № 5. Только быстро. Итак...

Задача № 5. Сколько поместится жирафов в кузове пятитонного грузовика?

— Тоже полный кузов,— сказал я неуверенно.

— Неправильно.

— А сколько же?

— Ни одного жирафа.

— Почему?

— Потому что кузов доверху набит бегемотами.

И в самом деле, после решения четвертой задачи бегемоты так и остались в кузове грузовика. Никто их не снял оттуда.

Задачи эти мне понравились, я их запомнил и, придя домой, рассказал моей дочке Кате. Она тогда училась в шестом классе. К моему удивлению, Катя мгновенно, одну за другой, их решила и сразу же задала мне

Задачу № 6. Мальчик упал с четырех ступенек и сломал ногу. Сколько ног сломает мальчик, если он упадет с сорока ступенек?

Я неуверенно сказал:

— Сорок ступенек ... это в десять раз больше, чем четыре ступеньки. Значит, мальчик сломает десять ног. Но, наверное, это неправильный ответ?

— Неправильный, — сказала Катя.

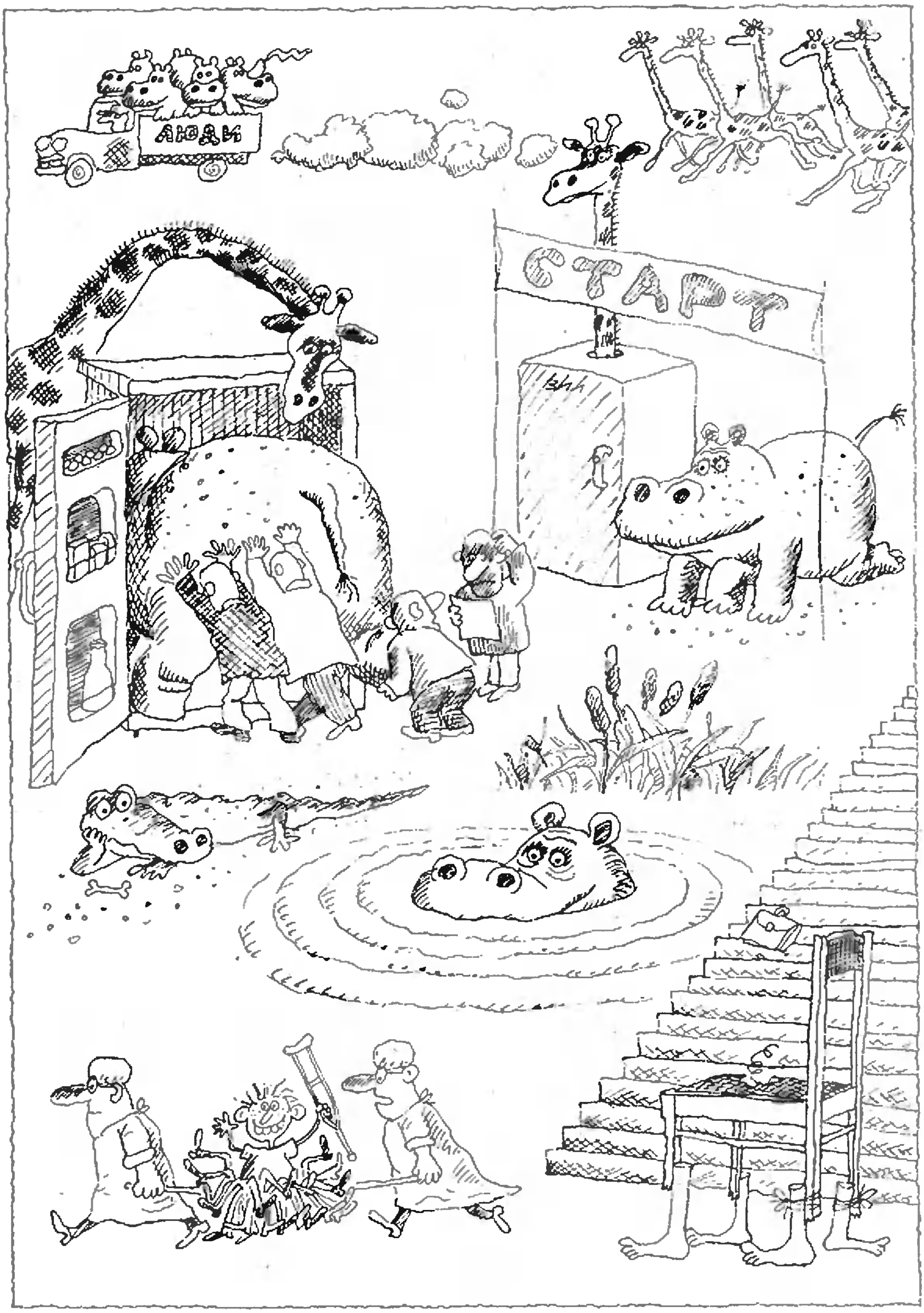
— А какой ответ правильный?

— Мальчик сломает всего одну ногу.

— Почему?

— Потому что одну ногу он уже сломал, а у него их всего две...

После мы с Катей решили, что нехорошо загадывать эту задачу про мальчика,



жалко его — это ведь очень больно, когда человек ломает ногу. Мы решили загадать эту задачу не про мальчика, а про стул: стул падает с лестницы, и при этом у него ломаются ножки. Стул, конечно, тоже жаль, но меньше, чем человека. И, кроме того, задача показалась нам очень интересной. Одного стула не жалко на такую задачу.

Вот и все известные мне задачи, расположенные по цепочке. Может быть, читатели знают и другие такие задачи? Тогда присылайте их в наш журнал.

Б. М. Болотовский

Олимпиады

XIII Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Ниже приводятся условия задач по математике и физике, предлагавшихся на заключительном этапе, и фамилии победителей XIII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $xy = 20 - 3x + y$.

2. На числовой оси расположено множество M, которое может быть покрыто тремя отрезками единичной длины. Пусть M' — множество середин всевозможных отрезков, концы которых принадлежат множеству M. Докажите, что множество M' можно покрыть шестью отрезками единичной длины. Всегда ли можно обойтись пятью отрезками?

3. Три окружности имеют общую точку M, попарно пересекаются в точках P, Q, R и расположены на плоскости так, как показано на рисунке 1. Через произвольную точку A одной из окружностей, лежащую на дуге PQ, не содержащей точку M, и точек P и Q, в которых окружность пересекает две другие окружности, проведены прямые, вторично пересекающие эти две окружности в точках B и C (см. рис. 1). Докажите, что точки B, C и R лежат на одной прямой.

4. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что можно переставить ее цифры так, что получится периодическая дробь.

5. Все углы выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равны. Все углы при вершинах «звезды» $ACEBDA$ также равны. Докажите, что пятиугольник $ABCDE$ является правильным.

9 класс

1. Найдите все значения n, при которых число $\underbrace{144\ldots4}_{n\text{ цифр}}$ является квадратом натурального числа.

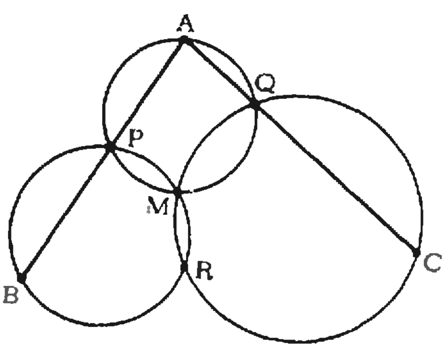


Рис. 1.

2. Среди 99 внешне одинаковых монет находится несколько фальшивых. Известно, что каждая фальшивая монета отличается по весу от настоящей монеты на нечетное число граммов и что суммарный вес всех данных монет равен весу 99 настоящих монет. Имеются двухчашечные весы со стрелкой, показывающей разницу в граммах весов грузов, положенных на чаши. Докажите, что, осуществив только одно взвешивание на таких весах, про любую заранее выбранную монету можно узнать, является она фальшивой или нет.

3. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то справедливо неравенство

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma > \frac{3}{4}.$$

4. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точку M проведены прямые l_1 и l_2, образующие одинаковые углы с хордой MN и пересекающие окружности, кроме точки M, еще в двух точках: l_1 — в точках A и B, l_2 — в точках C и D. Докажите, что $AB = CD$.

5. Биллиардный стол имеет форму правильного треугольника. Докажите, что если шар после удара прошел через некоторую точку семь раз, то он пройдет через нее еще хотя бы один раз.

10 класс

1. Найдите все трехзначные числа $\overline{abc}$, квадраты которых оканчиваются на abc.

2. Докажите, что при всех $x \in R$ справедливо тождество

$$|||\ldots|||x| - 2^n| - 2^{n-1}| - \ldots| - 2| - 1| = \\ = ||\ldots|||x| - 1\underbrace{| - 1| - \ldots| - 1|}_{2^{n+1}-1\text{ единиц}}.$$

3. Докажите, что если сумму

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{1984\cdot1985\cdot1986}$$

представить в виде несократимой дроби, то числитель этой дроби будет делиться нацело на 1987.

4. Пусть l — длина пространственной ломаной, a, b, c — длины ее проекций на координатные плоскости. а) Докажите, что справедливо неравенство $(a+b+c)/l \leqslant \sqrt{6}$. б) Существует ли замкнутая ломаная, для которой выполняется равенство $(a+b+c)/l = \sqrt{6}$?

5. Четверо правильно идущих часов лежат на столе вверх циферблатами так, что их центры являются вершинами квадрата. В некоторый момент времени концы минутных стрелок часов оказались вершинами квадрата. Докажите, что и в любой другой момент времени четырехугольник с вершинами в концах минутных стрелок также является квадратом. (Толщиной часов пренебречь.)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Автомат подает готовые детали на шероховатую ленту транспортера. Скорость деталей перед попаданием на транспортер $v_0 = 1$ м/с. Известно, что при скорости транспортера $v = 2$ м/с детали останавливаются на ленте на

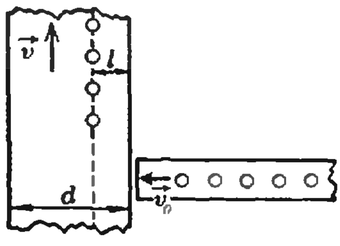


Рис. 1.

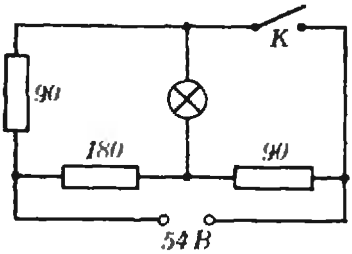


Рис. 2.

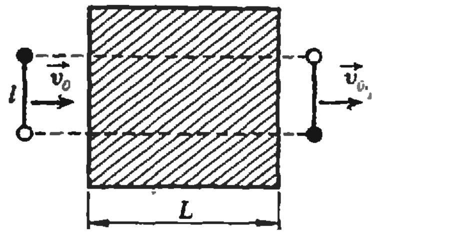


Рис. 3.

расстоянии $l={}^1/_3d$ от края (рис. 2). Какую скорость должна иметь лента транспортера, чтобы детали останавливались точно посередине?

2. При помощи нагревателя мощностью $P=100$ Вт кастрюлю, в которую налит $V=1$ л воды, никак не удается довести до кипения. Выключим нагреватель. За какое время температура воды упадет на $\Delta t=1$ градус?

3. В собранной схеме (рис. 3) лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K. Напряжение источника $U=54$ В. Найдите напряжение на лампочке.

4. В момент времени $t=0$ на частицу массой m, движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$, начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$. Определите перемещение частицы (модуль и направление относительно заданных векторов $\vec{F}$ и $\vec{v}_0$) за время, в течение которого вектор скорости частицы повернулся на известный угол α, оставшись тем же по модулю.

9 класс

1. Гантелька, представляющая собой длинную (длиной l) невесомую спицу с закрепленными на концах массивными шариками пренебрежимо малых размеров, движется поступательно со скоростью $\vec{v}_0$ и скрывается за ширмой, где испытывает столкновение с неподвижным препятствием (при этом слышен звук двух последовательных ударов). В результате гантелька вылетает из-за ширмы с прежней скоростью и по практически прежней траектории, но в перевернутом состоянии (рис. 4). Сколько времени гантелька находилась за ширмой? Ширина ширмы $L>l$.

2. В схеме (рис. 5) $\mathcal{E}_1=4\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_2=\mathcal{E}$, $C_1=C_2=C$. Ключ K сначала находится в положении «1», затем его переключают в положение «2». Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R_2 ($R_2=R_1$)?

3. Какова должна быть мощность насоса, поднимающего 0,2 кубометра воды в секунду ($V=0{,}2$ м^3/с) через трубу сечением $S=0{,}05$ м^2 на высоту $h=5$ м? Что изменится, если нужно поднимать такую же массу цементного раствора, у которого плотность в два раза больше, чем у воды?

4. Высокий теплоизолированный цилиндр разделен неподвижной теплопроводной перегородкой на две части. В верхней части под поршнем находится $\nu_1=1$ моль гелия при температуре $T_1=420$ К, в нижней части — $\nu_2=1{,}5$ моля гелия при $T_2=400$ К. Поршень может двигаться без трения, масса его $M=100$ кг. На сколько опустится поршень к моменту установления теплового равновесия в сосуде? Какая температура при этом установится? Внешнее давление не учитывать.

10 класс

1. Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы Земли возникнет сплошной тонкий слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение, за исключением инфракрасного. Какой стала бы при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет $T=300$ К? Учтите, что в состоянии теплового равновесия любое тело излучает с единицы поверхности поток энергии, который пропорционален четвертой степени его температуры (закон Стефана — Больцмана). Считать, что при температуре T практически все излучение инфракрасное. Отражением пренебречь.

2. При испытании тонкостенных стеклянных шаров на прочность воздух последовательно накачивался в шары с внешними радиусами R, $2R$ и $3R$. Стекло, из которого сделаны шары, однородно, шары имеют стенки одинаковой толщины. Какой из шаров должен лопнуть первым при одинаковом наименьшем давлении воздуха внутри шара? Какое условие следует наложить на толщину стенок шаров, чтобы при том же соотношении внешних радиусов шары выдерживали практически одинаковое предельное давление? Ответы обоснуйте.

3. Очень длинный соленоид в средней части окружен кольцевым проводящим обручем, ось которого совпадает с осью соленоида (рис. 6). Обруч составлен из двух половин, имеющих неизвестные разные сопротивления R_1 и R_2. К точкам A и B, в местах соединения половин, подключены три вольтметра с чисто активными внутренними сопротивлениями, причем проводник $A-V_0-B$ проложен строго по диаметру обруча, а проводники $A-V_1-B$ и $A-V_2-B$ — произвольно по разные стороны соленоида. По соленоиду пропускают переменный ток. Оказалось, что при этом вольтметр V_0 показы-

(Окончание см. на с. 63)

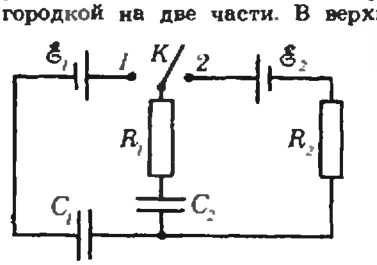


Рис. 4.

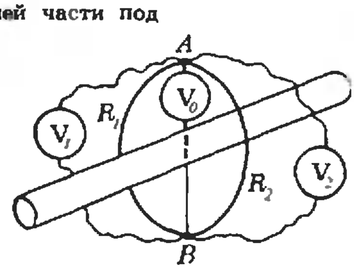


Рис. 5.

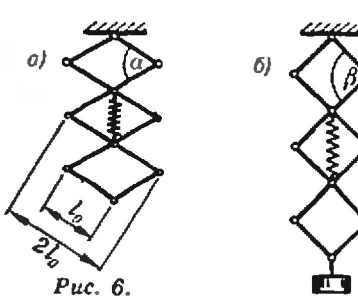


Рис. 6.

Призеры XIII Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Доброва Д. (Абакан, с. ш. № 20),
Межиров А. (Калинин, с. ш. № 37),
Рагулин В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 2),
Ким Г. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Шенкман П. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам —
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Ляндин В. (Белорецк, с. ш. № 14),
Осолоткин А. (Петрозаводск, с. ш. № 29),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Топровер И. (Волгоград, с. ш. № 50),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Кузнецова О. (Йошкар-Ола, с. ш. № 4),
Подобреев А. (Волгоград, с. ш. № 31),
Сапрыкин А. (Новосибирск, с. ш. № 110);

по 9 классам —
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Гагин В. (Уфа, с. ш. № 18),
Калинин А. (Саратов, с. ш. № 13),
Крикунов Ю. (г. Кировск Ленинградской обл., с. ш. № 2),
Рот Ф. (Томск, с. ш. № 88);

по 10 классам —
Кальницкий В. (Калининград, с. ш. № 50),
Когон Л. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Нарский И. (Воронеж, с. ш. № 58),
Тамаркин Д. (Горький, с. ш. № 17).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Вержбицкий П. (Ижевск, с. ш. № 11),
Дулев В. (Орел, с. ш. № 21),
Жуковец О. (Череповец, с. ш. № 27),
Овчаренко А. (Норильск, с. ш. № 6);

по 9 классам —
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Верховский А. (Магадан, с. ш. № 1),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Шамов З. (Махачкала, с. ш. № 39);

по 10 классам —
Бучин П. (Киров, с. ш. № 22),
Струнин А. (Ярославль, с. ш. № 34),
Узденский Д. (Ростов, с. ш. № 33),
Чурашев К. (Новосибирск, с. ш. № 130).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Абрамов А. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 56),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Толкунов Е. (Хабаровск, с. ш. № 3),
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3, 7 кл.);

по 9 классам —
Вихорев А. (Калинин, с. ш. № 17),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 17),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20);

по 10 классам —
Абдулазизов С. (Махачкала, с. ш. № 34),
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Вихлинин А. (Рязань, с. ш. № 20),
Корстен В. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Хайрутдинов И. (Миасс, с. ш. № 9).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Ермолов Э. (п. Леонидово Сахалинской обл., Леонидовская с. ш.),
Кравцов Д. (Новокуйбышевск, с. ш. № 3),
Самборский Д. (Истра, с. ш. № 2),
Ханжин С. (Астрахань, с. ш. № 5);

по 9 классам —
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Лутовинов А. (Мичуринск, с. ш. № 21),
Смирнов А. (Челябинск, с. ш. № 31),
Шпаков Д. (Красноярск, с. ш. № 101);

по 10 классам —
Даминов Н. (Братск, с. ш. № 18),
Карпов С. (Горький, с. ш. № 40),
Карякин А. (Тамбов, с. ш. № 29),
Третьяков Г. (Новгород, с. ш. № 21),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 31).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Малков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Пластов А. (Сарапул, с. ш. № 12),
Цыдынжапов Г. (Новосибирск, с. ш. № 10),
Янушко А. (Калининград, с. ш. № 24);

по 9 классам —
Гапоненко А. (ст-ца Динская Краснодарского кр., с. ш. № 4),
Кириллов Э. (Комсомольск-на-Амуре, с. ш. № 16),
Рожков А. (Калининград, с. ш. № 17),
Шиховцев О. (Верхняя Салда, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Вязигин А. (Майкоп, с. ш. № 17),
Гурарий В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Солнцев К. (Томск, с. ш. № 32),
Терпугов В. (Томск, с. ш. № 50).

(Начало см. на с. 60)

вает напряжение $u_0=5$ В, вольтметр $V_1 - u_1 = 10$ В. Что показывает вольтметр V_2? Магнитным полем вне солеиоида, а также индуктивностью контуров пренебречь.

4. Из невесомых стержней, длина которых l_0 и $2l_0$, собрана конструкция в виде «гармошки» (рис. 7). Трения в шарнирах нет. В среднее звено вставили невесомую пружину, и конструкция приняла форму, характеризуемую углом α (см. рис. 7, *а*). Затем снизу подвесили некоторый груз, угол между стержнями стал равен β (см. рис. 7, *б*). Каким будет период колебаний, если толкнуть груз в вертикальном направлении?

Экспериментальный тур

8 класс

1. В «черном ящике» находятся три резистора. Нарисуйте возможную схему их соединения.

Оборудование: амперметр школьный, вольтметр школьный, источник питания, реостат школьный, соединительные провода, ключ соединительный.

2. Исследуйте процесс соударения двух монет, находящихся на листе бумаги, расположенном на горизонтальном столе. Определите, выполняется ли закон сохранения механической энергии.

Оборудование: лист миллиметровой бумаги, две пятикопеечные монеты, линейка ученическая, транспортир.

9 класс

1. Определите зависимость коэффициента усиления транзистора по току в схеме с общим эмиттером от силы тока в коллекторе в диапазоне токов $0 \div 30$ мА.

Оборудование: транзистор малой мощности типа МП41 или МП42, микроамперметр на 500 мкА, батарейка 4,5 В, переменный резистор 30 кОм, лист с приведенной на нем цоколевкой транзистора, миллиамперметр на 50 мА.

2. Определите зависимость угла наклона, при котором капля начинает скатываться по стеклу, от массы капли.

Оборудование: стеклянная пластинка, транспортир, пипетка, мензурка, сосуд с водой.

10 класс

1. Измерьте сопротивления 4-х резисторов.

Оборудование: батарейка 4,5 В, миллиамперметр на 5 мА, вольтметр на 5 В, неизвестные резисторы, ключ, соединительные провода.

2. Исследуйте зависимость давления насыщенных паров воды от температуры.

Оборудование: сосуд с водой, нагреватель (спиртовка, сухой спирт, электроплитка), пробирка с делениями, термометр, барометр (один на класс), штатив с муфтой и лапкой.

Публикацию подготовили *Б. Б. Буховцев, Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко*

Ответы, указания, решения

Конденсаторы с «избыточным» зарядом пластин

1. $\Delta\varphi = (N-1)\,qd/(2\varepsilon_0 S)$; эквивалентная схема изображена на рисунке 3, *б* в статье.
2. Сила направлена к пластине *1*, а ее модуль $F = q^2/(8\varepsilon_0 S)$.
3. Задача имеет два решения: 1) $q_1 = q_2 = q_0/2$; 2) $q_1 = q_0/2 - 2C\mathcal{E}$, $q_2 = q_0/2 + 2C\mathcal{E}$ $(q_0 > 4C\mathcal{E})$.
4. $A = {}^1/_4\,\varepsilon_0 S d E_0^2$.
5. $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E} + {}^1/_6\, q$.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 9)

Вопросы и задачи

1. Частицы дыма участвуют в броуновском движении и постепенно удаляются друг от друга, отчего плотность дыма уменьшается.
2. Из-за ослабления броуновского движения капелек масла.
3. Число ударов молекул жидкости о поверхность частицы растет пропорционально площади этой поверхности, масса же частицы пропорциональна ее объему. Поэтому с ростом размеров частицы молекулам все труднее сдвинуть частицу. Броуновская частица также должна быть достаточно малой, для того чтобы удары молекул были нескомпенсированы.
4. С ростом температуры увеличивается скорость диффузии.
5. Частые соударения молекул приводят к тому, что пути, проходимые ими, намного протяженнее перемещений, движение происходит по зигзагообразным траекториям.
6. Через пленку лака пары воды диффундируют медленнее, дерево «просыхает» равномерно по всей толще, и шар не растрескивается.
7. Из-за большой разреженности атмосферы число молекул в единице объема невелико для того, чтобы передать при соударениях со спутником заметное количество энергии.
8. Если у Луны и была атмосфера, то за долгое время существования Луны она исчезла: среди множества молекул, составлявших атмосферу, всегда присутствовали такие, у которых скорость теплового движения достигала второй космической скорости для Луны.
9. При сборке осколков практически невозможно расположить поверхности трещин на таком расстоянии, когда силы притяжения молекул станут заметными.
10. При длительном плотном соприкосновении атомы гайки и болта из-за диффузии перемешиваются на границе, приводя к соединению.
11. Работа по изменению уровня жидкости в капилляре совершается за счет энергии взаимодействия молекул.
12. Давление увеличилось бы.

Микроопыт

Три струйки соединяются в одну. Это объясняется молекулярным притяжением струй, возникающем при их сближении.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 9)

1. 45203+45203=90406.
2. Достаточно поместить термометр в хороший морозильник. В результате спирт сократится и весь втянется в колбочку. Потом при нагревании новый столбик спирта будет уже без разрывов.
3. Раз доля Алеши составляет 25 копеек, то таковы же доли Коли и Вити. Значит, все 5 пакетиков ирисок стоят 75 копеек, а один пакетик — 15 копеек. Коля заплатил 45 копеек, значит, он должен получить 45—25=20 копеек, а Витя 30—25=5 копеек.
4. Раз часы принимались бить пять раз, то получасовых ударов было 2 или 3. Если их было 3, то на два соседних часа приходится 8 ударов; но в одном случае будет четное число ударов, а в другом нечетное, т. е. в сумме 8 ударов быть не может. Если было 2 получасовых удара, то оставшиеся 9 ударов однозначно представляются в виде суммы трех последовательных чисел: 2+3+4. Анатолий Павлович ушел в 4 часа дня.
5. Не может, так как сумма 0+1+2+...+ +9=45. Если бы степень двойки имела поровну нулей, единиц и т. д., то сумма цифр у этого числа делилась бы на 45 и, следовательно, на 9; значит, и само число должно делиться на 9, а оно может иметь делителями только степени числа 2.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (В. Харли, 1926 г.). 1. Ла5!! Тема завлечения. 1...Кр:а5 2. Cd2×, 1...К:а5 2. Са3×. На 1...Кс4 следует 2. Фа4×, а других защит от 2. Cd2× или 2. Лb5× у черных нет.

Задание 14 (А. Максимовских, 1984 г.). **1. Крс1 f5!** От пешки нужно срочно избавиться. **2. С:f5 а1Ф+ 3. Cb1 Крb7 4. h4!** — вперед должна двигаться, именно эта пешка. **4...Крb6 5. h5 Кра5 6. h6 Кра4 7. h7 а5.** Патовая клетка подготовлена, но **8. h8C! Ф:b2+ 9. С:b2** с выигрышем (8...Крb3 9. Се5 Кр:с4 10. b3+!).

Сдано в набор 19 08 87 Подписано к печати 22 09 87
Т 19411 Бумага 70×108/16 Печать офсетная
Усл кр отт 23,8 Усл печ л 5,6 Уч изд л 6,65
Тираж 200 575 экз Цена 40 коп Заказ 2272

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕР В КОМПАНИИ ГРОССМЕЙСТЕРОВ

Первые встречи за шахматной доской между человеком и машиной относятся к началу 70-х годов. Понятно, что в эпоху «универсалов» — компьютеров, занимающих огромные помещения, такие встречи приходилось специально организовывать. Сейчас, когда интенсивно развивается индустрия персональных ЭВМ, в том числе шахматных микрокомпьютеров, поиграть с машиной может каждый (у нас они тоже скоро поступят в продажу). Что касается гроссмейстеров, то к ним, как правило, обращаются с просьбой провести сеанс одновременной игры против целой компании машин; иногда автоматы включаются в число участников обычного сеанса. Впрочем, все чаще компьютеры играют в одних турнирах с шахматистами, причем в турнирах весьма престижных.

Экс-чемпион мира М. Таль недавно играл в международном турнире в Западном Берлине, участником которого был и «Мефисто» — чемпион мира среди шахматных микрокомпьютеров. Жаль, что встречи между ними не произошло,— швейцарская система не свела их вместе. На этот турнир съехались 466 шахматистов из 77 стран, среди них 15 гроссмейстеров и 50 международных мастеров. В состязании предусматривалось девять туров. Победителем вышел Таль, что и не удивительно. А вот результат машины поистине сенсационный: «Мефисто» набрал 5,5 очков и разделил 63-е место, причем в одной компании с ним оказались гроссмейстеры Радулов, Георгиев и Лехтинский, а позади на пол-очка — гроссмейстеры Беллон, Трингов и Спасов. Разумеется, «швейцарка» со своим неровным составом часто преподносит сюрпризы, но в любом случае тем, кто скептически относится к шахматным способностям компьютеров, есть повод засомневаться.

Творческим шедевром турнира в Западном Берлине стала следующая партия между «Мефисто» и гамбургским игроком М. Фетте, обладателем мастерского рейтинга 2300.

«Мефисто» — М. Фетте

Защита Грюнфельда

1. c4 Kf6 2. Kc3 d5 3. cd K:d5 4. d4 g6 5. e4 K:c3 6. bc Cg7. Турнир проходил одновременно с матч-реваншем Каспаров — Карпов, в котором защита Грюнфельда была самым популярным дебютом. Правда, в настоящей партии соперники разыгрывают вариант, не встречавшийся в поединке за корону. **7. Kf3 c5 8. Cb5+ Kc6 9. 0—0 0—0 10. C:c6 bc 11. Ce3 Cg4 12. Лc1.** ЭВМ без особых претензий разыграла дебют, и сейчас черные могли быстро свести дело к ничьей: 12...С:f3 13.Ф:f3 cd 14. cd C:d4 15. C:d4 Ф:d4 16. Л:c6 и т. д. Однако человек всегда стремится одолеть машину. **12...Фa5 13. Фe2 Лfd8 14. Лfd1 Фa4.** Теперь угроза пешке d4 весьма серьезна. Белые вынуждены сыграть e4 — e5, и позиционный перевес черных становится бесспорным. **15. e5 cd 16. cd Ce6 17. Cg5 Лd7 18. Лd2 h6 19. Ce3 Лb8 20. Лdc2 Cd5 21. Ke1!**

Конь направляется на пункт c5 — прекрасный стратегический замысел. Удивительно, насколько хорошо играет компьютер в этой трудной ситуации. **21...Лdb7 22. Kd3 Лb1 23. h3 Kph7 24. Фd2 e6 25. Л:b1 Л:b1+ 26. Kph2 Ce4 27. Лc5.** «Мефисто» ставит хитрую ловушку: 27...Лd1 28. Kb2! Л:d2 29. K:a4 Л:a2 30. Kc3. Вариант форсированный, поэтому для компьютера *совершенно элементарный*.

27...Фa6 28. Лc3. Угроза Kc5 уже не шуточная. **28...Cd5 29. a3 Cf8 30. f3.** Ограничивая действия слона d5. **30...Фa4 31. Kc5 Фd1.** После размена на c5 в связи с разнопольными слонами на доске стояла бы битая ничья. Черные слегка нервничают и ищут возможность переиграть соперника в эндшпиле. Но ситуация обостряется.

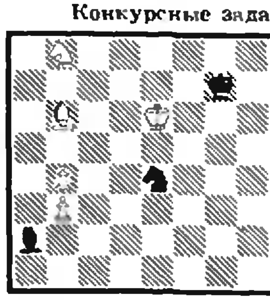
32. Ф:d1 Л:d1 33. Kd7 Ce7 34. Kpg3 g5 35. Kpf2 Kpg6 36. g4!? Белые берут под контроль поле f5, но ослабляют пешки f3 и h3. **36...Cd8 37. Kf8+ Kpg7 38. Kd7.** Машина пока согласна на ничью. **38...Ca5 39. Лc5 Ce1+ 40. Kpe2 Лa1 41. Kf6.** В поисках шансов на победу черные играют с огнем. Теперь у «Мефисто» в проекте появилась угроза Лg8×, поэтому черный слон должен держать поле a5 (защищаясь от Лc5 — a5:a7), а ладья — самого слона. Неприятный переплет!

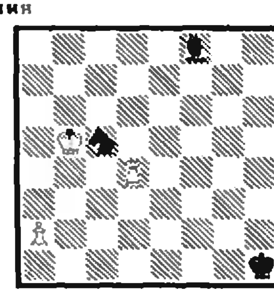
41...a5 42. f4 Cg2? (следовало взять на f4) **43. fg hg 44. Cf2.** Интересно почему белые не побили пешку g5? После 44. C:g5 C:h3 (44...Kpg6 45. h4 с идеей Kf6—h5—f4+) 45. Л:c6 у белых страшная угроза Лc6 — c8 — g8×. Неужели машина предусмотрела контршах 45...Cf1+! Тогда король должен брать слона: 46. Kp:f1 Cd2+ 47. Kpe2 C:g5 и несмотря на отсутствие пешки перевес снова переходил к черным: 48. Kh5+ Kpg6 49. Лc3 Cc1.

44...C:f2 45. Kp:f2 Лa2+ 46. Kpg1 Cd5 47. K:d5. Последняя возможность поставить перед черными проблемы заключалась в 47. Л:a5. Теперь проигрывает 47...Лd2 48. Лa8 Л:d4 49. Лg8+ Kph6 с неизбежным матом. Спасение, по-видимому, состояло в 47...Лg2+ 48. Kpf1 Лh2 49. Лa8 Лh1+ с вечным шахом, поскольку белый король не может ускользнуть через поле b4 ввиду c6 — c5+.

47...cd 48. Л:a5 Лd2 49. Лa4 Лd1+ 50. Kph2 Лd2+. Ничья, лишняя пешка не имеет значения. Партия, которой могут гордиться и черные!

Конкурсные задания





19, 20. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 декабря 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Несколько лет назад неистощимый Эрнё Рубик придумал игрушку, в которой 11 фишек, расположенные в узлах квадратной решетки, при помощи трех кареток совершают «челночные рейсы» вниз — вверх (3 ряда по 3 фишки сразу) и влево — вправо (2 ряда по 4 фишки раздельно). Как обычно, задача играющего в том, чтобы после нескольких произвольных сдвигов восстановить исходный порядок фишек, показанный на рисунке 1. На этой головоломке мы еще раз продемонстрируем эффективность приемов, с которыми мы знакомили читателей в «Кванте» № 5.

Первым делом посмотрим, как переставляются фишки под действием различных коммутаторов — операций типа «туда — сюда — оттуда — отсюда». Если «туда» — это вниз, а «сюда» — влево («оттуда» и «отсюда», естественно, — вверх и вправо), то в зависимости от того, какой из двух горизонтальных рядов сдвигается, верхний или нижний, получаются две операции — A и B (рис. 2). Обе они переставляют фишки циклически: A — по синим стрелкам, B — по зеленым. Есть еще третий вариант — двигать влево-вправо сразу обе горизонтальные каретки. Возникающая операция C переставляет фишки по периметру игрушки против часовой стрелки. Если сначала они стоят в исходном порядке, то после применения C переместятся так:

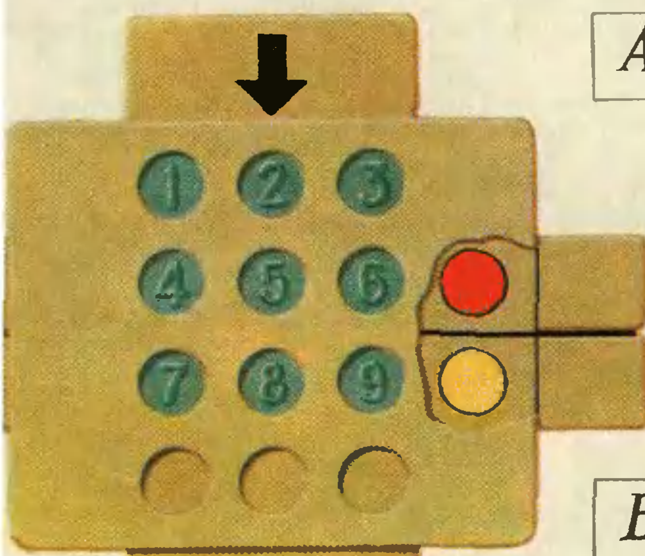
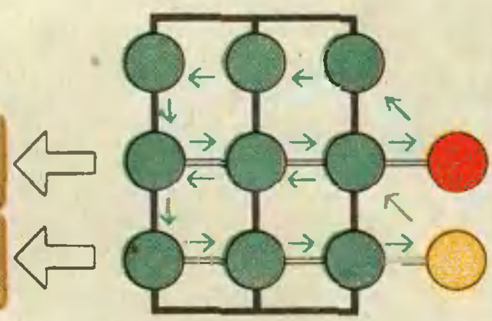


Рис. 1.

$$A = \downarrow \Leftarrow \uparrow \Rightarrow$$



$$B = \downarrow \Leftarrow \uparrow \Rightarrow$$

Рис. 2.

7 → 8 → 9 → желтая → красная → 3 → 2 → 1 → →4→7. Следующий шаг — рассмотреть коммутаторы операций A, B и C. Впрочем, можно обойтись только одним из них — $K=AB^{-1}A^{-1}B$. Он меняет местами фишки 1 и 7 и одновременно 5 и 6 (в исходном положении). Теперь мы сможем переставить любые две фишки, стоящие через одну, по периметру головоломки (при этом одновременно переставляются 5 и 6). Например, для фишек 1 и 3 это делается так: сдвигаем их с помощью C^2 на места 7 и 1, выполняем K и возвращаем назад. Операции такого вида ($C^n K C^{-n}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$) позволяют получить любую перестановку всех фишек, кроме 5 и 6; проверьте это! Но не случится ли, что все эти фишки попадут на свои места, а 5 и 6 окажутся переставленными? Оказывается нет. Поясним это, опуская за недостатком места самое существенное — доказательства. Всякую перестановку можно представить последовательностью попарных обменов, причем разными способами. (Например, цикл A получится, если последовательно менять местами красную фишку с фишками 6, 5, 4, 1, 2, 3 или фишку 6 с 5, 4, 1, ...). При этом число обменов либо всегда будет четным — тогда перестановка называется четной, либо нечетным — тогда она нечетная. Если после нескольких сдвигов каретки вернулись в исходную позицию, то каждая из них сдвигалась четное число раз. Отсюда выводится, что образовавшаяся в результате перестановка будет четной, а значит, получить ровно один парный обмен нельзя. Кстати, здесь же кроются и ответы на наши вопросы о головоломках из 5-го и 6-го номеров журнала.

Уважаемые читатели! По редакционному календарю Новый год уже на носу, а наш запас головоломок еще далеко не исчерпан. Напишите, нравятся ли вам наши заметки о них? Надо ли продолжать эту серию?